Implementácie grafov

Existuje viacero spôsobov, ako implementovať graf ako dátovú štruktúru:

Implementácie grafov

Existuje viacero spôsobov, ako implementovať graf ako dátovú štruktúru:

1. zoznamom vrcholov a hrán
2. zoznamom zoznamov susedov vrcholov
3. maticou susednosti
4. maticou incidencie

Implementácie grafov

Existuje viacero spôsobov, ako implementovať graf ako dátovú štruktúru:

1. zoznamom vrcholov a hrán
2. zoznamom zoznamov susedov vrcholov
3. maticou susednosti
4. maticou incidencie

Pri voľbe konkrétnej implementácie je potrebné zohľadniť typ riešeného problému, pamäťové nároky a realizovateľnosť grafových operácií.

Implementácia zoznamom vrcholov a hrán vychádza priamo z definície grafu - implementuje sa zoznam názvov vrcholov a zoznam dvojíc vrcholov, ktoré tvoria hrany.

Implementácia zoznamom vrcholov a hrán vychádza priamo z definície grafu - implementuje sa zoznam názvov vrcholov a zoznam dvojíc vrcholov, ktoré tvoria hrany.

Príklad

$G = (V, E)$
zoznam vrcholov: a, b, c, d, e, f, g
zoznam hrán: $ab, bc, cd, da, ae, be, ce, de, af, bf, ef, fg$

Implementácia zoznamom vrcholov a hrán vychádza priamo z definície grafu - implementuje sa zoznam názvov vrcholov a zoznam dvojíc vrcholov, ktoré tvoria hrany.

Príklad

$G = (V, E)$
zoznam vrcholov: a, b, c, d, e, f, g
zoznam hrán: $ab, bc, cd, da, ae, be, ce, de, af, bf, ef, fg$

Výhody: pre riedke grafy menšie pamäťové nároky, ľahká realizovateľnosť operácie pridania vrcholov resp. hrán.

Implementácia zoznamom vrcholov a hrán vychádza priamo z definície grafu - implementuje sa zoznam názvov vrcholov a zoznam dvojíc vrcholov, ktoré tvoria hrany.

Príklad

$G = (V, E)$
zoznam vrcholov: a, b, c, d, e, f, g
zoznam hrán: $ab, bc, cd, da, ae, be, ce, de, af, bf, ef, fg$

Výhody: pre riedke grafy menšie pamäťové nároky, ľahká realizovateľnosť operácie pridania vrcholov resp. hrán.

Nevýhody: zdĺhavosť niektorých operácií (napr. zistiť, či sú dva konkrétne vrcholy susedné).

Implementácia zoznamom zoznamov susedov: vytvorí sa zoznam vrcholov, pričom z každého vrchola existuje odkaz na zoznam všetkých jeho susedov.

Implementácia zoznamom zoznamov susedov: vytvorí sa zoznam vrcholov, pričom z každého vrchola existuje odkaz na zoznam všetkých jeho susedov.

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný zoznamom zoznamov susedov:

$$\begin{array}{lcl} a & : & b, d, e, f \\ b & : & a, c, e, f \\ c & : & b, d, e \\ d & : & a, c, e \\ e & : & a, b, c, d, f \\ f & : & a, b, e, g \\ g & : & f \end{array}$$

Implementácia zoznamom zoznamov susedov: vytvorí sa zoznam vrcholov, pričom z každého vrchola existuje odkaz na zoznam všetkých jeho susedov.

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný zoznamom zoznamov susedov:

$$\begin{array}{lcl} a & : & b, d, e, f \\ b & : & a, c, e, f \\ c & : & b, d, e \\ d & : & a, c, e \\ e & : & a, b, c, d, f \\ f & : & a, b, e, g \\ g & : & f \end{array}$$

Výhody: pre riedke grafy menšie pamäťové nároky, ľahká realizovateľnosť operácie pridania vrcholov resp. hrán.

Implementácia zoznamom zoznamov susedov: vytvorí sa zoznam vrcholov, pričom z každého vrchola existuje odkaz na zoznam všetkých jeho susedov.

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný zoznamom zoznamov susedov:

$$\begin{array}{lcl} a & : & b, d, e, f \\ b & : & a, c, e, f \\ c & : & b, d, e \\ d & : & a, c, e \\ e & : & a, b, c, d, f \\ f & : & a, b, e, g \\ g & : & f \end{array}$$

Výhody: pre riedke grafy menšie pamäťové nároky, ľahká realizovateľnosť operácie pridania vrcholov resp. hrán.

Nevýhody: zdĺhavosť niektorých operácií (testovanie susednosti vrcholov).

Definícia

Nech je daný graf $G = (V, E), V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Matica susednosti *grafu* G *je štvorcová symetrická matica* $A = (a_{i,j})$ *rádu* n *taká, že*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ak } v_i v_j \in E \\ 0, & \text{ak } v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Implementácia maticou susednosti: vytvorí sa pole

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný pomocou matice susednosti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný pomocou matice susednosti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výhody: veľmi rýchle zisťovanie susednosti vrcholov a ich stupňov (operácie s bitmi!)

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný pomocou matice susednosti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Výhody: veľmi rýchle zisťovanie susednosti vrcholov a ich stupňov (operácie s bitmi!)

Nevýhody: veľké pamäťové nároky oproti predošlým implementáciám (najmä pre riedke grafy), zdĺhavá realizácia niektorých operácií (napr. pridávanie/odoberanie vrcholov)

Definícia

Nech je daný graf $G = (V, E), V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Matica incidencie *grafu* G *je obdĺžniková matica* $B = (b_{i,j})$ *s* n *riadkami a* m *stĺpcami taká, že*

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \textit{ak } v_i \textit{ inciduje s } e_j \\ 0, & \textit{inak} \end{cases}$$

Príklad

Predchádzajúci graf implementovaný pomocou matice incidencie:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Táto implementácia sa obvykle nepoužíva (avšak, matica incidencie je dôležitá pre výpočet istých invariantov grafu).

Asymptotické porovnávanie funkcií

Definícia

Nech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset O(g(x))$*, ak existuje* $c \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $|f(x)| \leq c|g(x)|$.

Asymptotické porovnávanie funkcií

Definícia

Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset O(g(x))$*, ak existuje* $c \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $|f(x)| \leq c|g(x)|$.

Definícia

Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset \Omega(g(x))$*, ak existuje* $c \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $c|g(x)| \leq |f(x)|$.

Asymptotické porovnávanie funkcií

Definícia

Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset O(g(x))$*, ak existuje* $c \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $|f(x)| \leq c|g(x)|$.

Definícia

Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset \Omega(g(x))$*, ak existuje* $c \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $c|g(x)| \leq |f(x)|$.

Definícia

Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sú funkcie. Hovoríme, že* $f(x) \sqsubset \Theta(g(x))$*, ak existuje* $c, c' \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0 \in \mathbb{R}^+$ *také, že pre všetky* $x > x_0$ *je* $c|g(x)| \leq |f(x)| \leq c'|g(x)|$.

Interpretácia: $O(g(x))$ označuje triedu funkcií reálnej premennej x, ktorých rast je limitovaný rastom funkcie $g(x)$ (t.j. funkcia g ich dominuje). Relácia "$\sqsubset$" sa potom interpretuje ako množinová inklúzia (navyše však môže vystupovať v štandardných matematických výrazoch).

Interpretácia: $O(g(x))$ označuje triedu funkcií reálnej premennej x, ktorých rast je limitovaný rastom funkcie $g(x)$ (t.j. funkcia g ich dominuje). Relácia "$\sqsubset$" sa potom interpretuje ako množinová inklúzia (navyše však môže vystupovať v štandardných matematických výrazoch).

Upozornenie

Relácia "$\sqsubset$" **nie je** symetrická, napr. $f(x) = x \sqsubset O(x) \sqsubset O(x^2)$, ale $O(x^2) \not\sqsubset O(x)$.
Ak $f(x) \sqsubset O(g(x))$ a $h(x) \sqsubset O(g(x))$, tak vo všeobecnosti neplatí $f(x) = h(x)$.

Interpretácia: $O(g(x))$ označuje triedu funkcií reálnej premennej x, ktorých rast je limitovaný rastom funkcie $g(x)$ (t.j. funkcia g ich dominuje). Relácia "$\sqsubset$" sa potom interpretuje ako množinová inklúzia (navyše však môže vystupovať v štandardných matematických výrazoch).

Upozornenie

Relácia "$\sqsubset$" **nie je** symetrická, napr. $f(x) = x \sqsubset O(x) \sqsubset O(x^2)$, ale $O(x^2) \not\sqsubset O(x)$.
Ak $f(x) \sqsubset O(g(x))$ a $h(x) \sqsubset O(g(x))$, tak vo všeobecnosti neplatí $f(x) = h(x)$.

Veta

Nech f_1, f_2, g_1, g_2 sú reálne funkcie, $f_1 \sqsubset O(g_1), f_2 \sqsubset O(g_2)$. Potom

- $f_1 + f_2 \sqsubset O(g_1 + g_2)$
- $f_1 \cdot f_2 \sqsubset O(g_1 \cdot g_2)$

Príklad

$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$

Príklad

$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$
$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + 2n \cdot O(\log(n)) + (O(\log(n)))^2) \sqsubset$

Príklad

$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + 2n \cdot O(\log(n)) + (O(\log(n)))^2) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n \log n) + O(\log^2 n)) \sqsubset$$

Príklad

$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + 2n \cdot O(\log(n)) + (O(\log(n)))^2) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n \log n) + O(\log^2 n)) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n\sqrt{n}) + O(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n})) \sqsubset$$

Príklad

$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + 2n \cdot O(\log(n)) + (O(\log(n)))^2) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n \log n) + O(\log^2 n)) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n\sqrt{n}) + O(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n})) \sqsubset$$
$$n^3 + O(n^{\frac{5}{2}}) + O(n^{\frac{5}{2}}) + O(n^2) + O(n^2) + O(n^{\frac{3}{2}}) \sqsubset$$

Príklad

$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n + O(\log(n)))^2 \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + 2n \cdot O(\log(n)) + (O(\log(n)))^2) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n \log n) + O(\log^2 n)) \sqsubset$$
$$(n + O(\sqrt{n})) \cdot (n^2 + O(n\sqrt{n}) + O(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n})) \sqsubset$$
$$n^3 + O(n^{\frac{5}{2}}) + O(n^{\frac{5}{2}}) + O(n^2) + O(n^2) + O(n^{\frac{3}{2}}) \sqsubset$$
$$n^3 + O(n^{\frac{5}{2}})$$

Prehľadávanie do hĺbky (DFS - depth first search)

Princíp - zvolí sa jeden špecifický vrchol (koreň). Tento sa spracuje (napr. otestuje sa informácia v ňom obsiahnutá) a označí ako prejdený. Toto spracovanie a označenie sa ďalej rekurzívne použije na všetky neprejdené vrcholy, ktoré sú s ním susedné.

Prehľadávanie do hĺbky (DFS - depth first search)

Princíp - zvolí sa jeden špecifický vrchol (koreň). Tento sa spracuje (napr. otestuje sa informácia v ňom obsiahnutá) a označí ako prejdený. Toto spracovanie a označenie sa ďalej rekurzívne použije na všetky neprejdené vrcholy, ktoré sú s ním susedné.

Algoritmus DFS - prehľadávanie z koreňa

VSTUP: graf $G = (V, E)$, vrchol $v_1 \in V$

```
procedúra DFS(x: vrchol):
        {v1 → ZÁSOBNÍK
        označ(v1)
        pokiaľ (ZÁSOBNÍK ≠ ∅) opakuj
                        ZÁSOBNÍK → u
                        spracuj(u)
                        pre každý (v susedný s u) opakuj
                                        ak (neoznačený(v)) tak
                                                        označ(v)
                                                        v →  ZÁSOBNÍK }
```

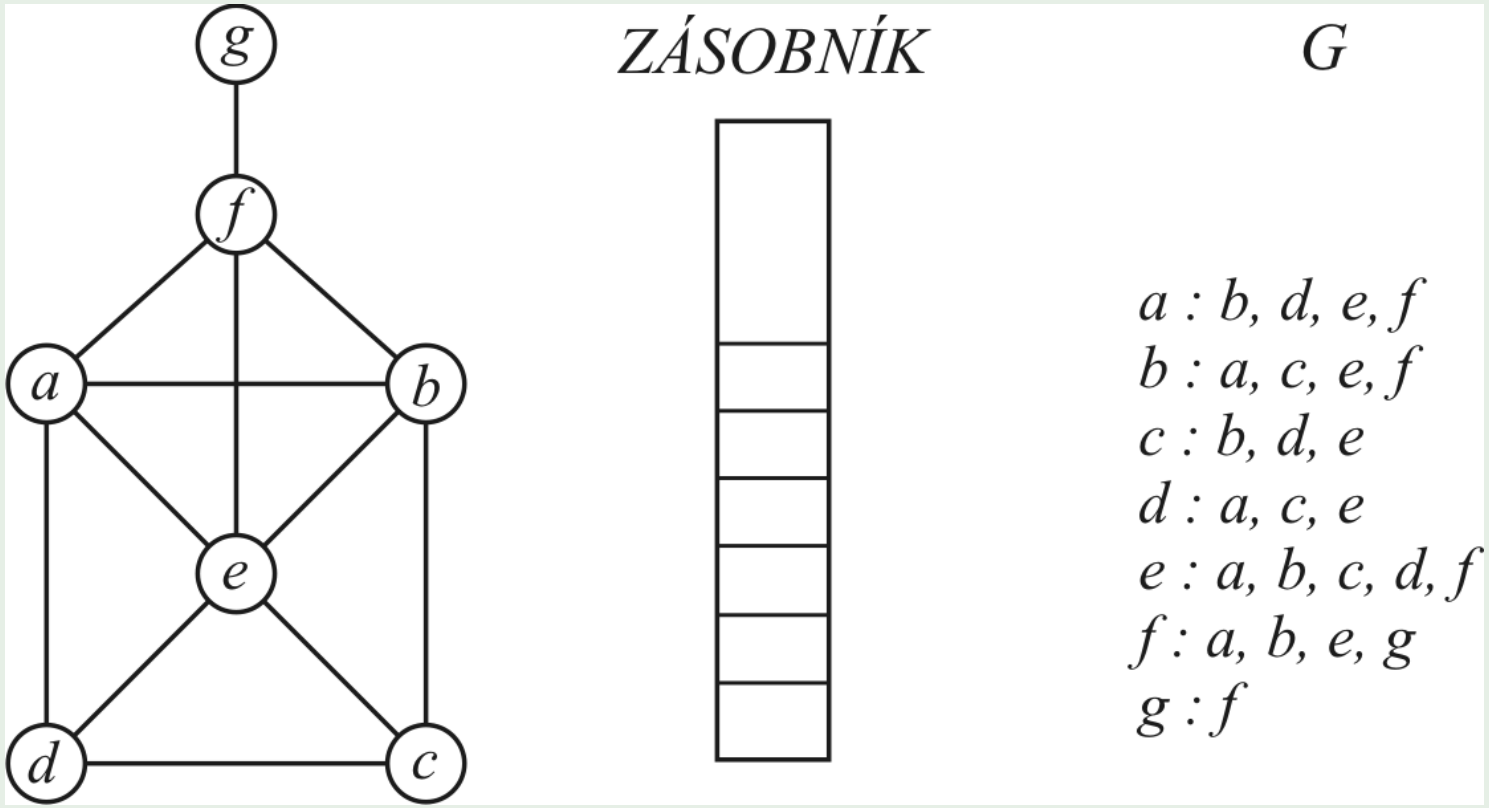
Algoritmus DFS - prehľadávanie celého grafu

VSTUP: graf $G = (V, E)$

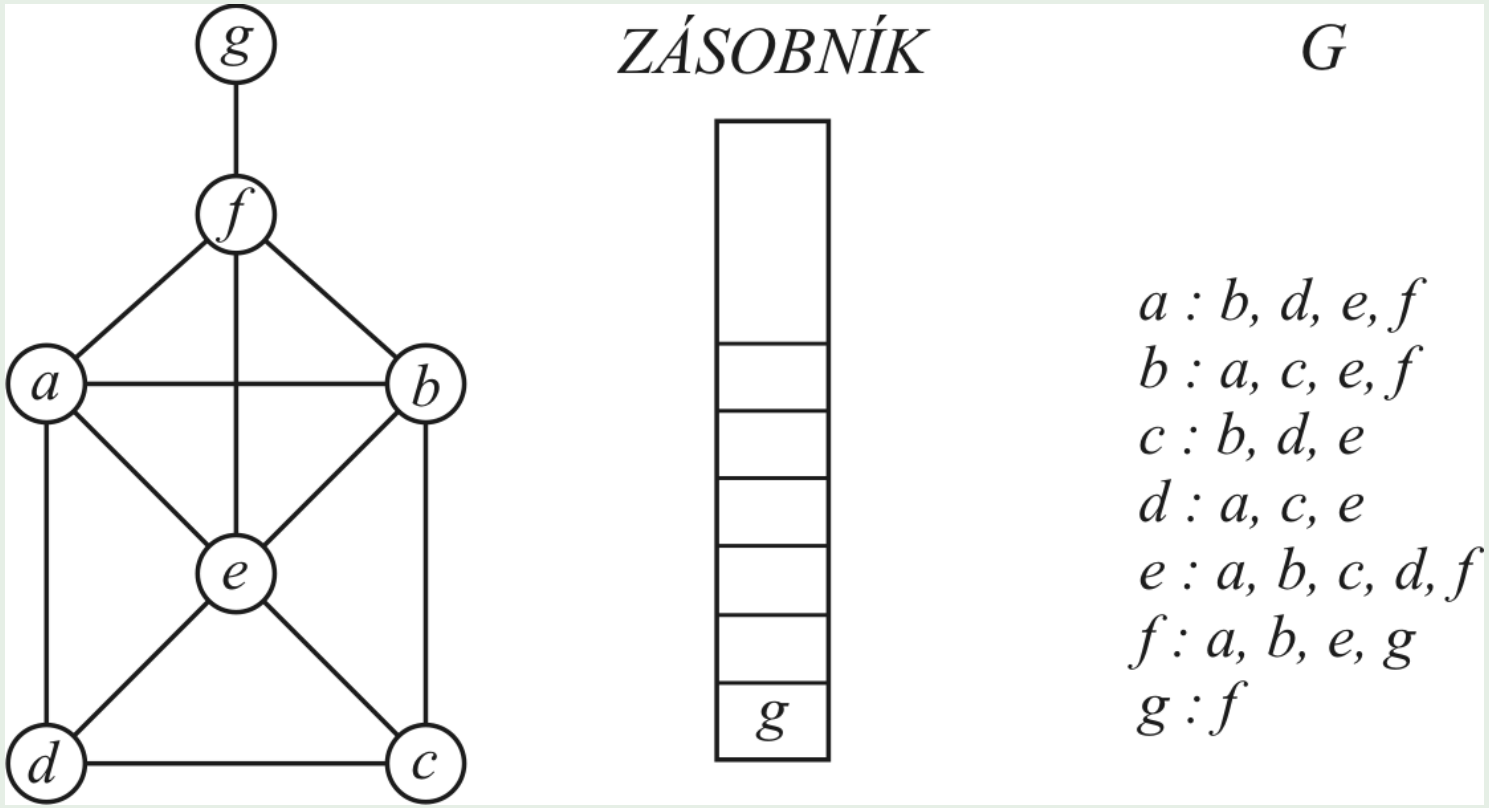
pre $(i = 1..|V|)$ opakuj
ak (neoznačený(v_i)) tak DFS(v_i)

Zložitosť algoritmu je $O(n + m)$, kde n je počet vrcholov a m počet hrán grafu.

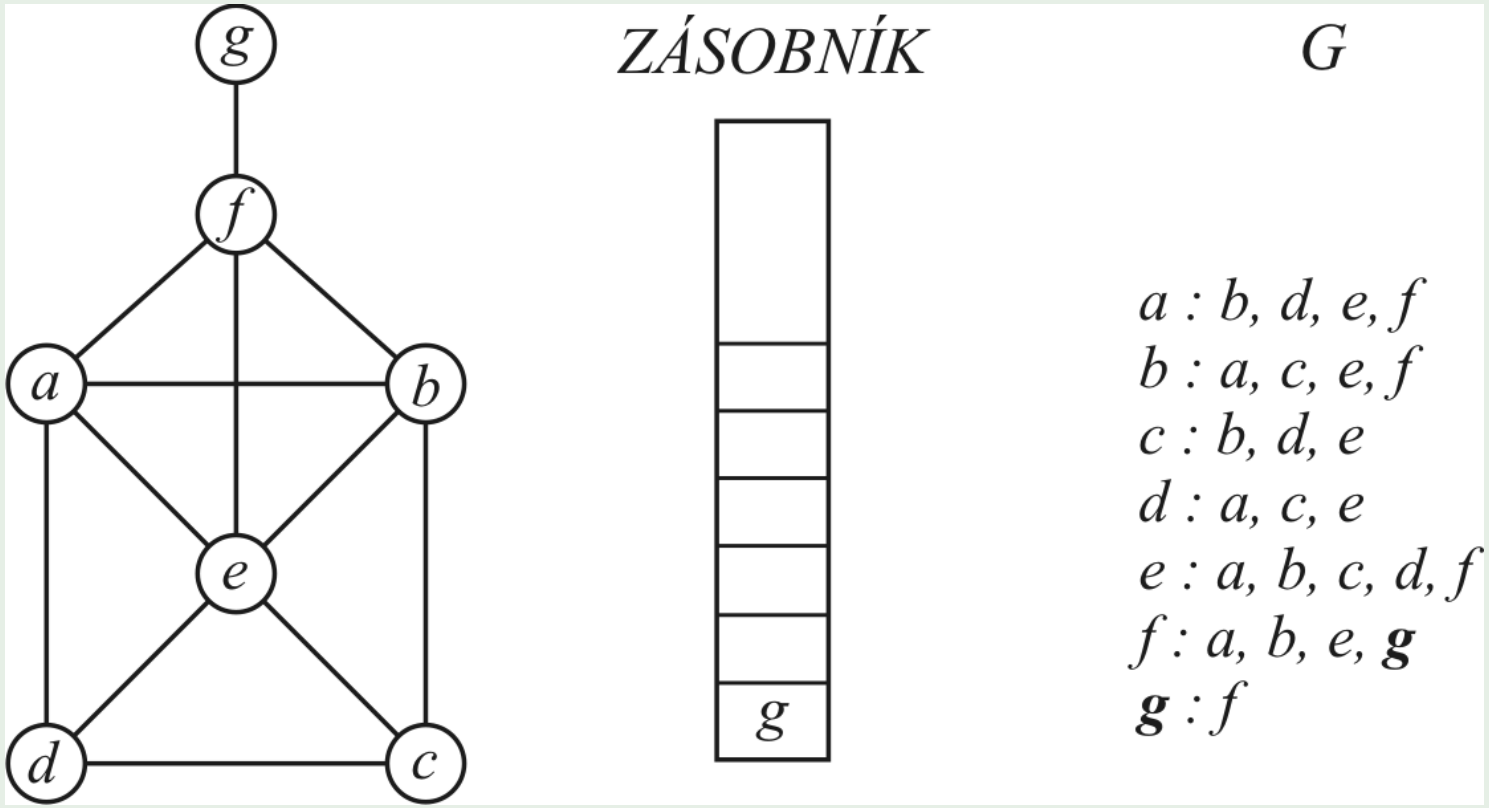
Príklad



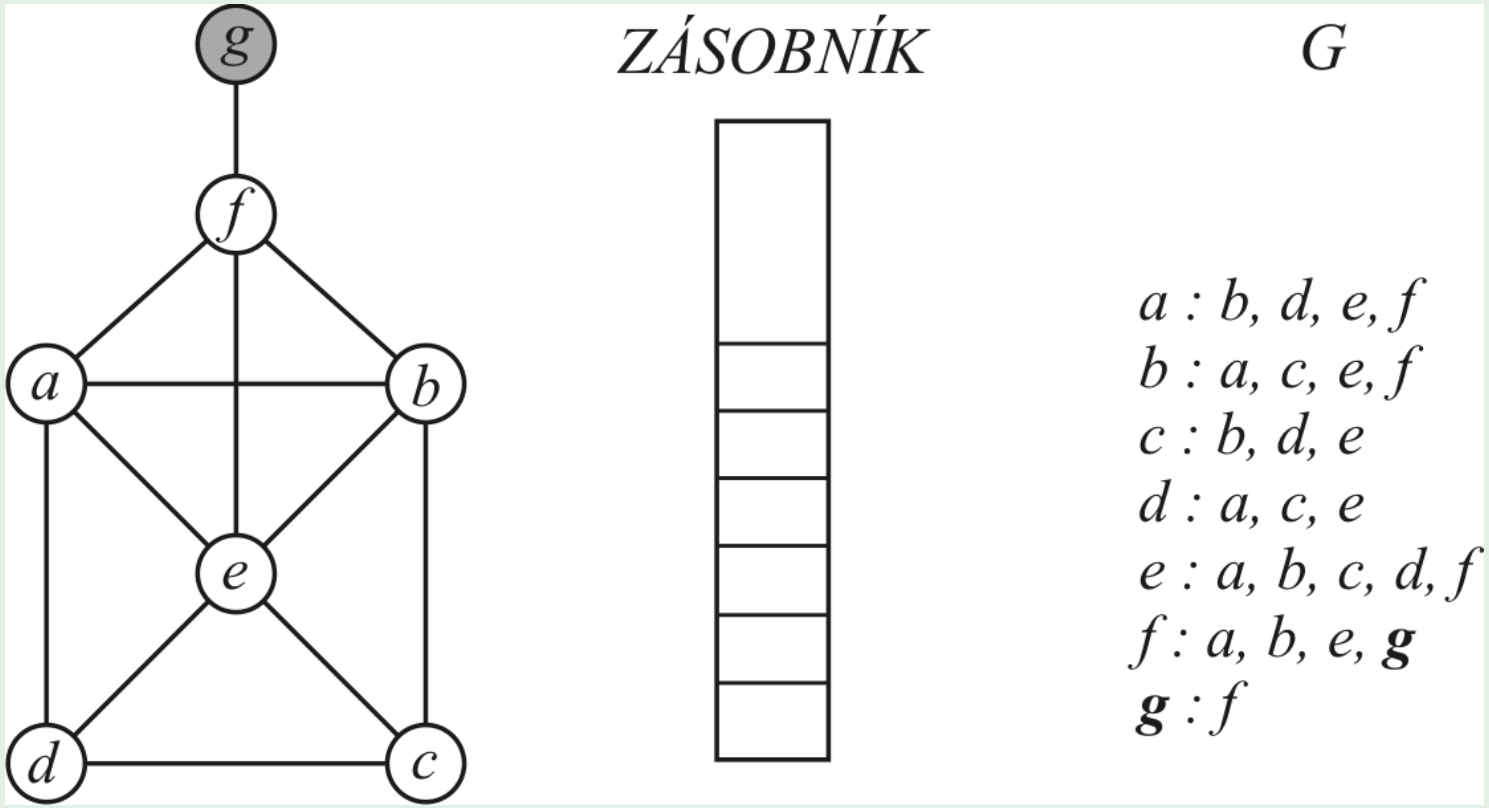
Príklad



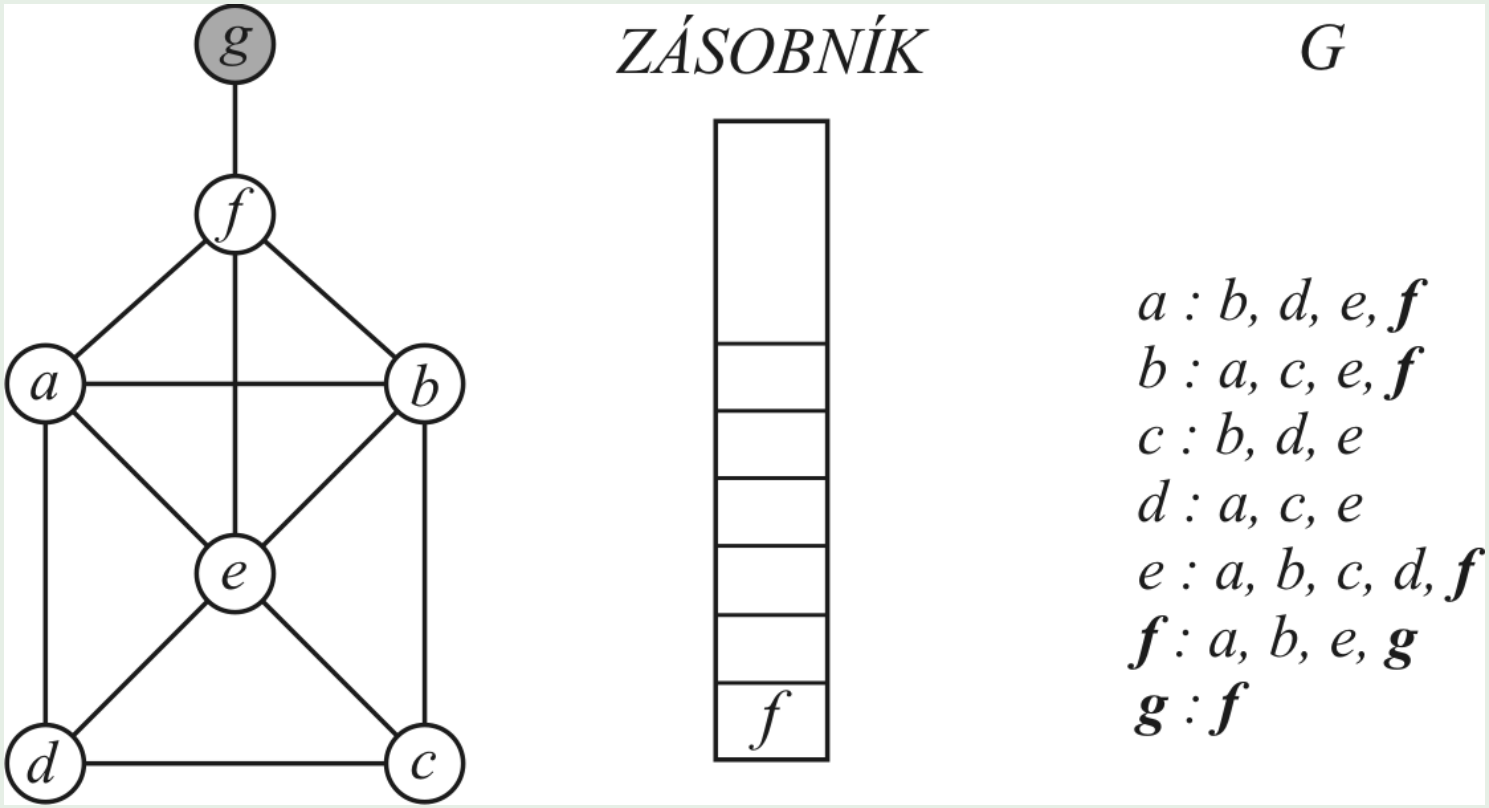
Príklad



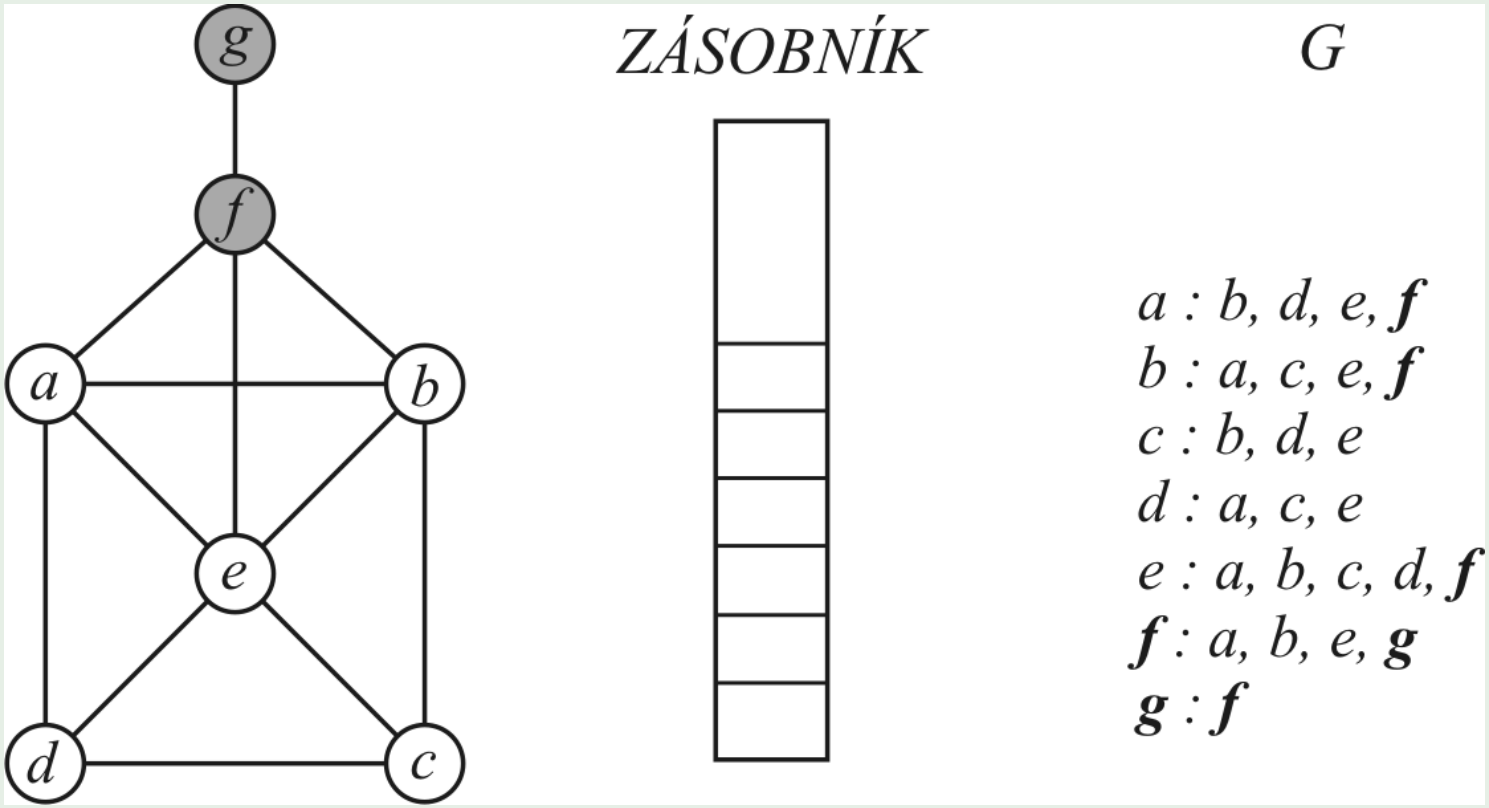
Príklad



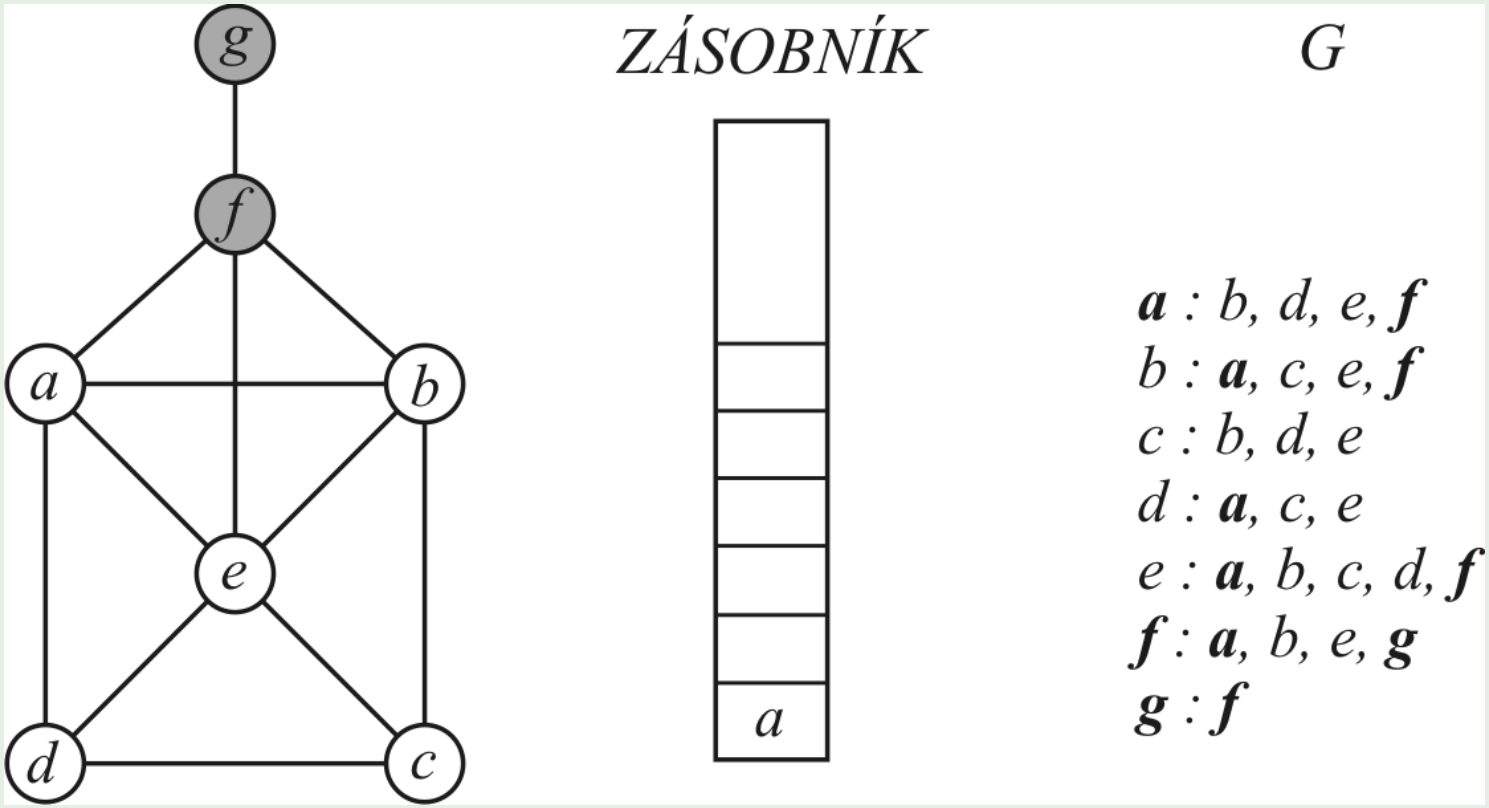
Príklad



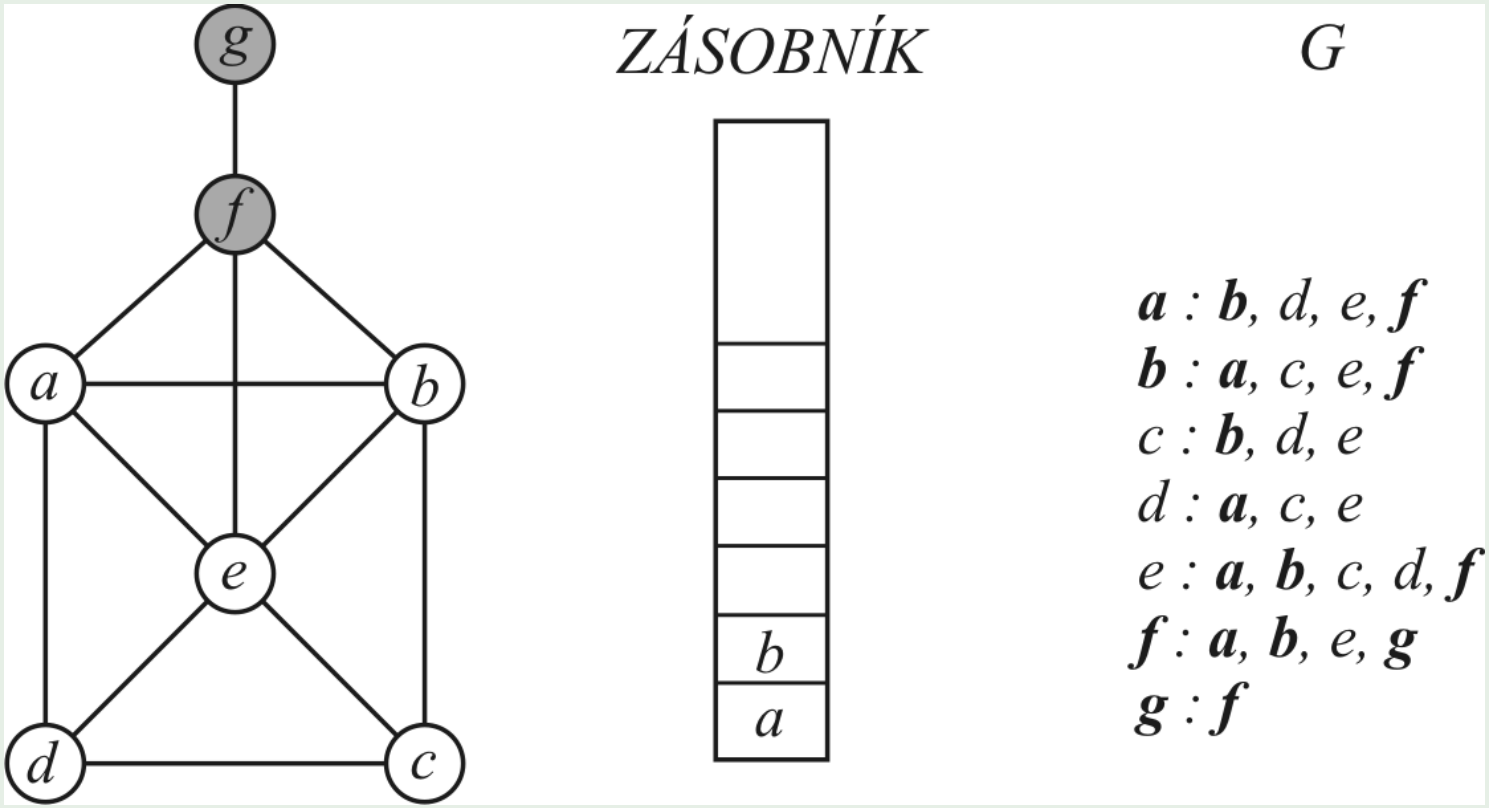
Príklad



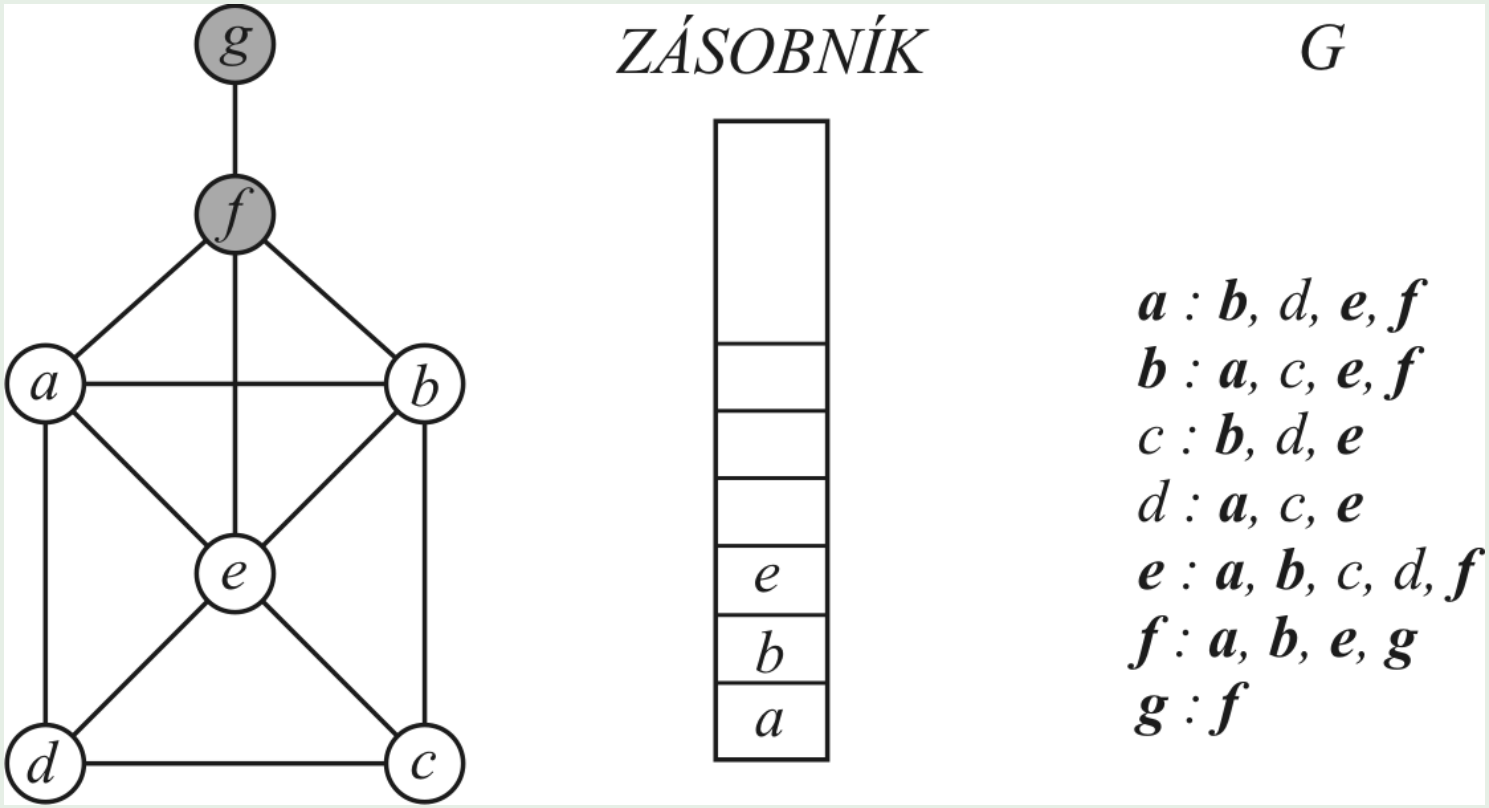
Príklad



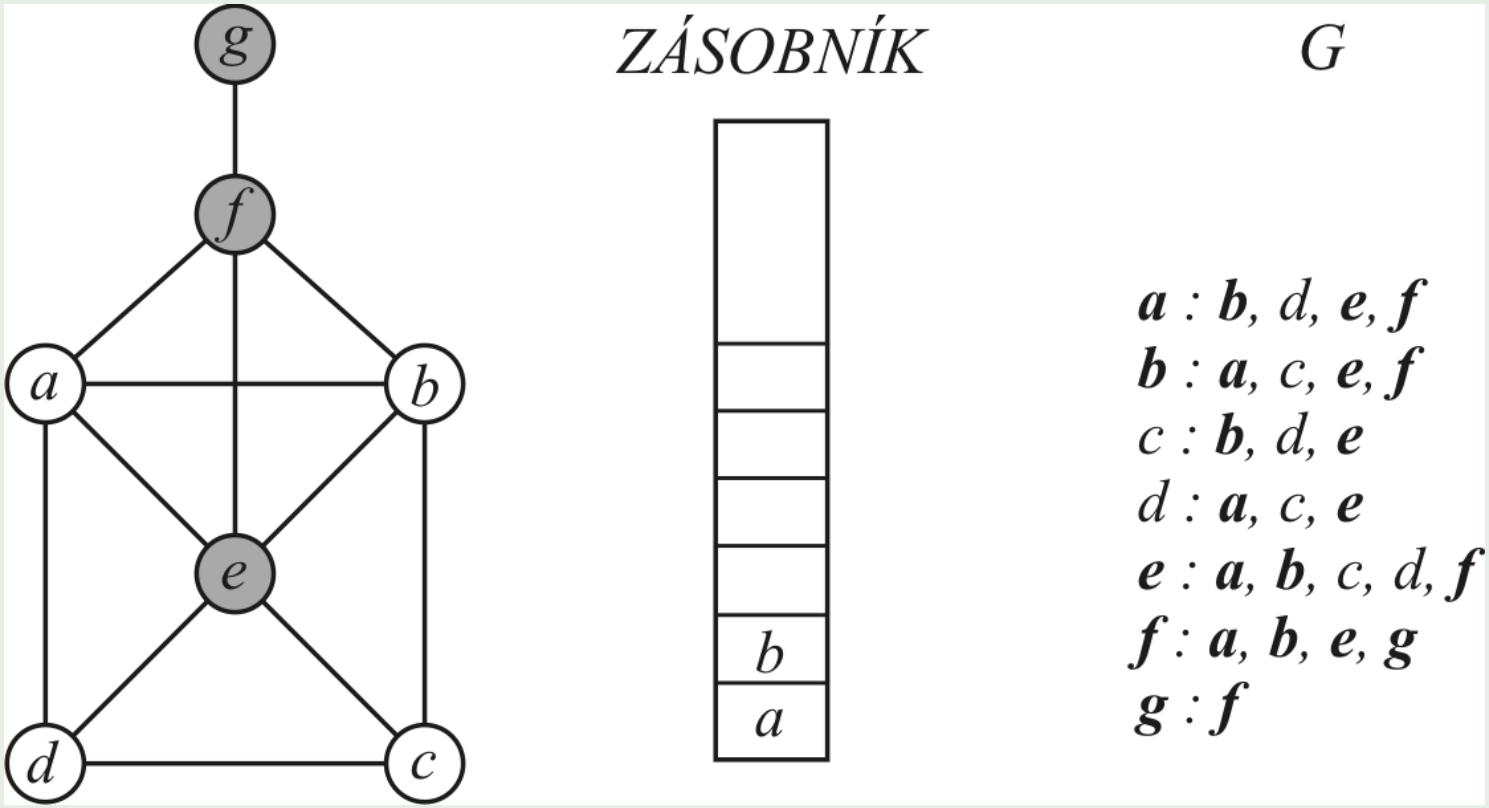
Príklad



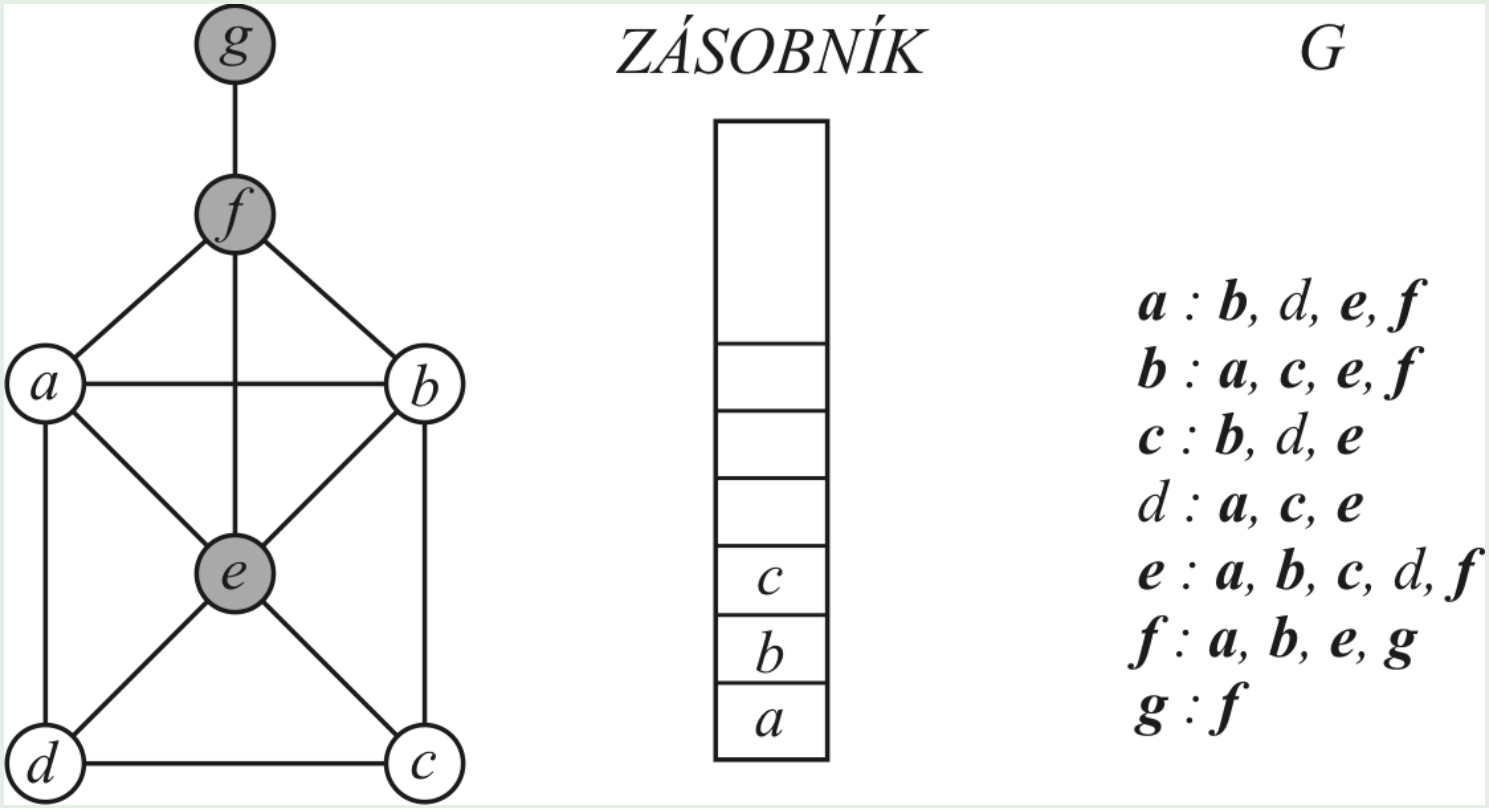
Príklad


g
f
a
b
e
d
c
ZÁSOBNÍK
e
b
a
G
a : b, d, e, f
b : a, c, e, f
c : b, d, e
d : a, c, e
e : a, b, c, d, f
f : a, b, e, g
g : f

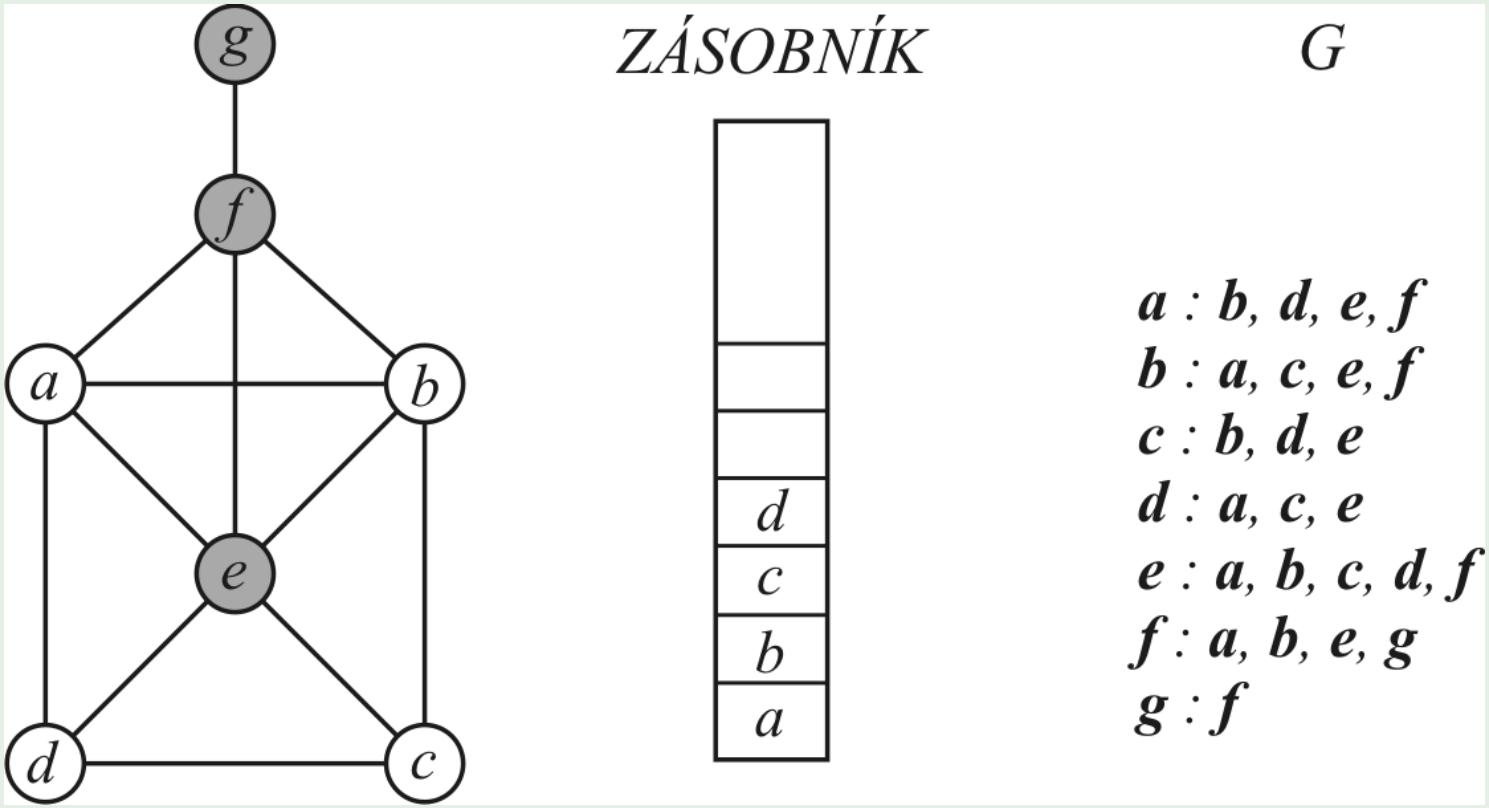
Príklad



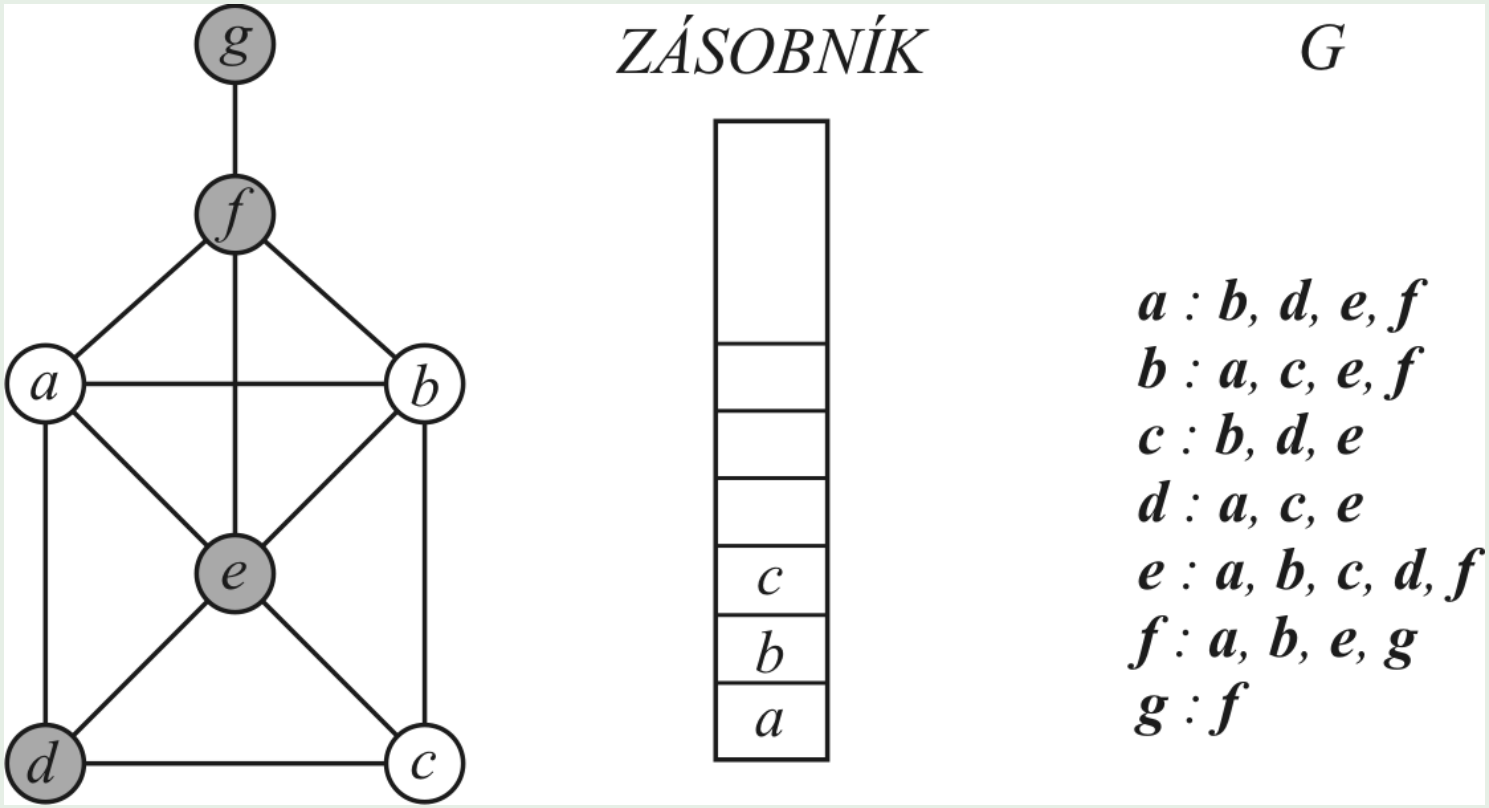
Príklad


g
f
a
b
e
d
c
ZÁSOBNÍK
c
b
a
G
a : b, d, e, f
b : a, c, e, f
c : b, d, e
d : a, c, e
e : a, b, c, d, f
f : a, b, e, g
g : f

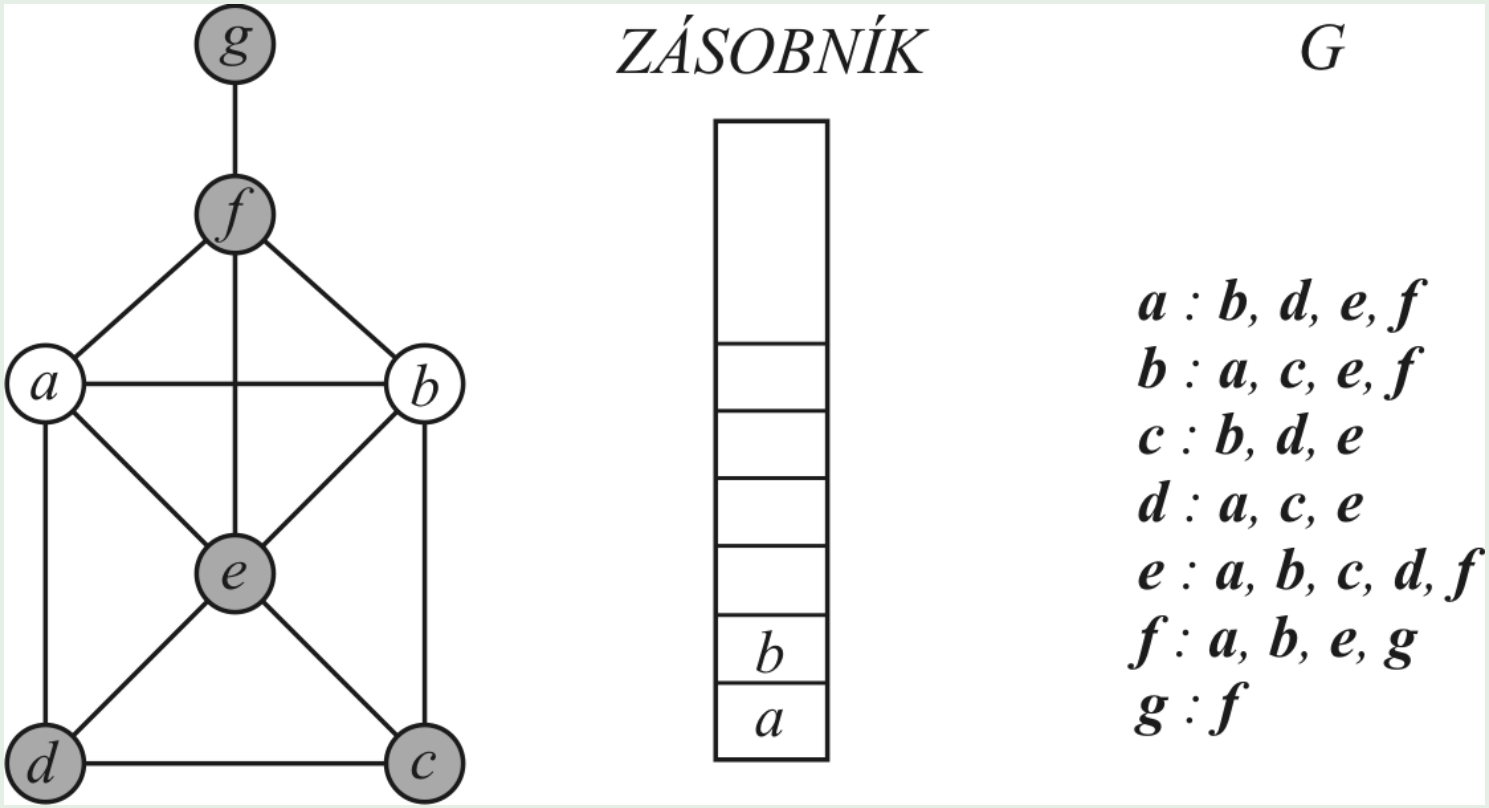
Príklad


g
f
a
b
e
d
c
ZÁSOBNÍK
d
c
b
a
G
a : b, d, e, f
b : a, c, e, f
c : b, d, e
d : a, c, e
e : a, b, c, d, f
f : a, b, e, g
g : f

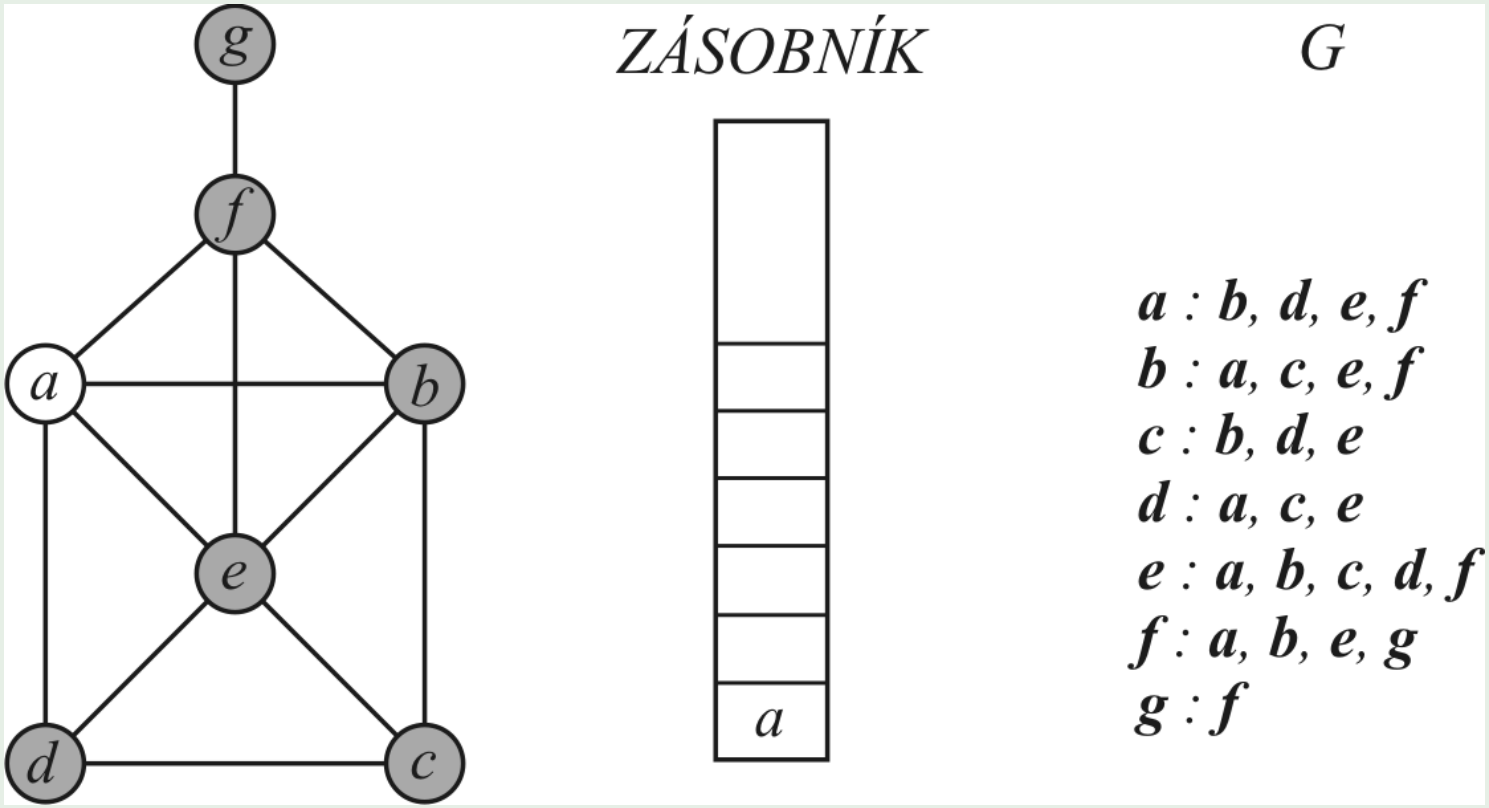
Príklad


g
f
a
b
e
d
c
ZÁSOBNÍK
c
b
a
G
a : b, d, e, f
b : a, c, e, f
c : b, d, e
d : a, c, e
e : a, b, c, d, f
f : a, b, e, g
g : f

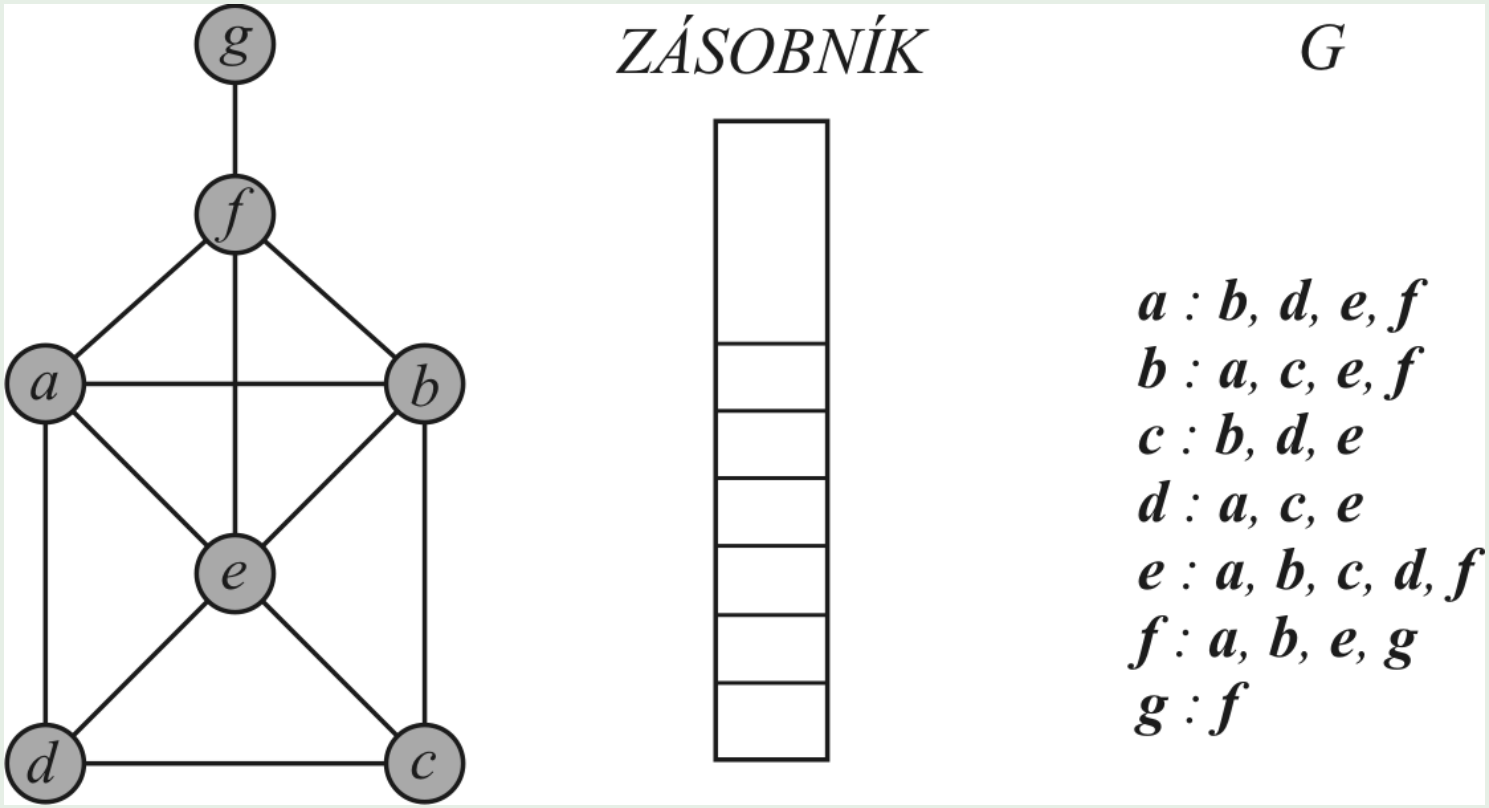
Príklad



Príklad



Príklad



Prehľadávanie do šírky (BFS - breadth first search)

Princíp - ako pri prehľadávaní do hĺbky, miesto zásobníka sa však použije rad (teda spracujú sa prednostne vrcholy grafu, ktoré sa nachádzajú "v rovnakej hĺbke" od koreňa).

Prehľadávanie do šírky (BFS - breadth first search)

Princíp - ako pri prehľadávaní do hĺbky, miesto zásobníka sa však použije rad (teda spracujú sa prednostne vrcholy grafu, ktoré sa nachádzajú "v rovnakej hĺbke" od koreňa).

Algoritmus BFS - prehľadávanie z koreňa

VSTUP: graf $G = (V, E)$, vrchol $v_1 \in V$

```
procedúra DFS(x: vrchol):
        {v1 → RAD
        označ(v1)
        pokiaľ (RAD ≠ ∅) opakuj
                        RAD → u
                        spracuj(u)
                        pre každý (v susedný s u) opakuj
                                        ak (neoznačený(v)) tak
                                                        označ(v)
                                                        v →  RAD }
```

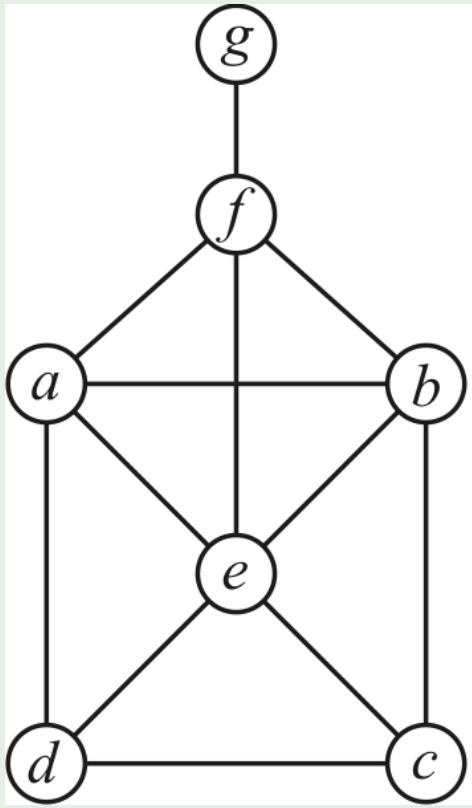
Algoritmus BFS - prehľadávanie celého grafu

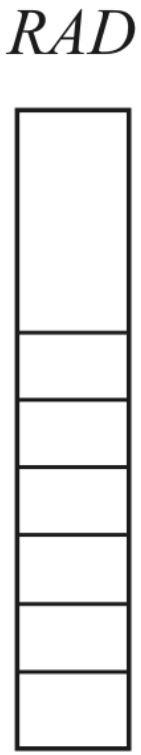
VSTUP: graf $G = (V, E)$

pre $(i = 1..|V|)$ opakuj
ak (neoznačený(v_i)) tak BFS(v_i)

Zložitosť algoritmu je $O(n + m)$, kde n je počet vrcholov a m počet hrán grafu.

Príklad

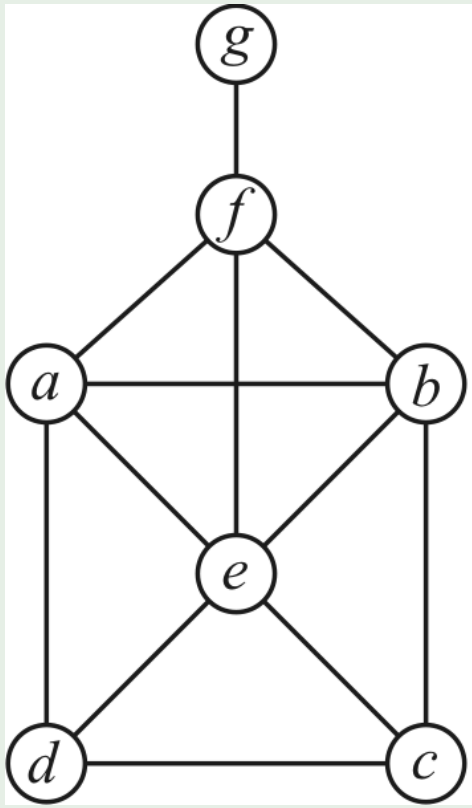


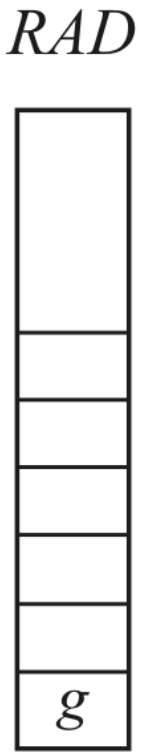


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

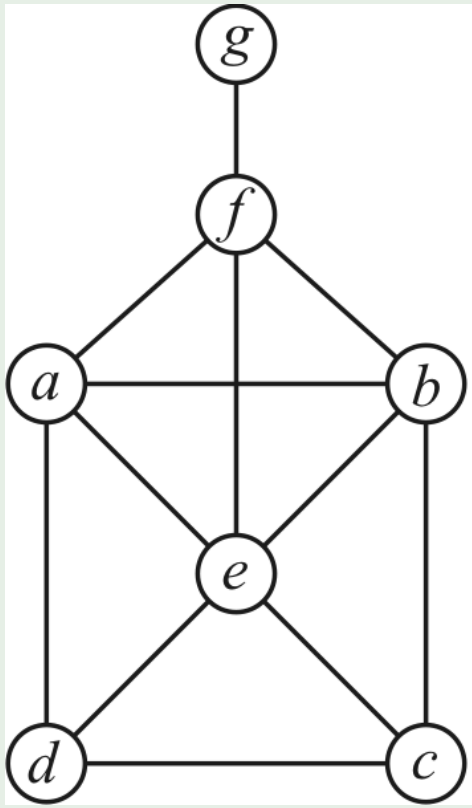


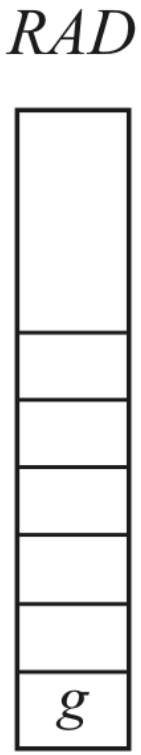


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

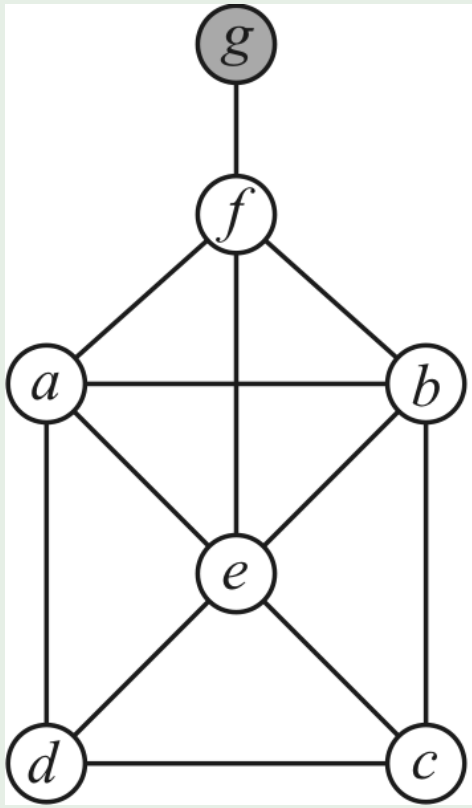


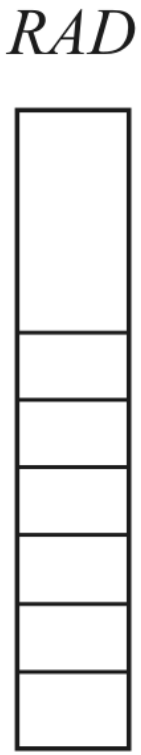


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, \mathbf{g}$
$\mathbf{g} : f$

Príklad

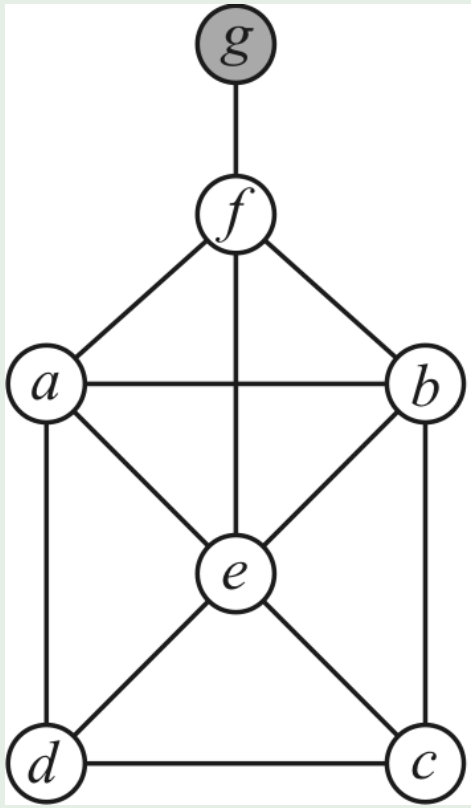


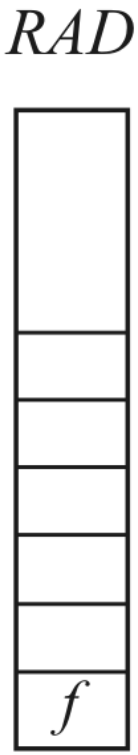


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, \mathbf{g}$
$\mathbf{g} : f$

Príklad

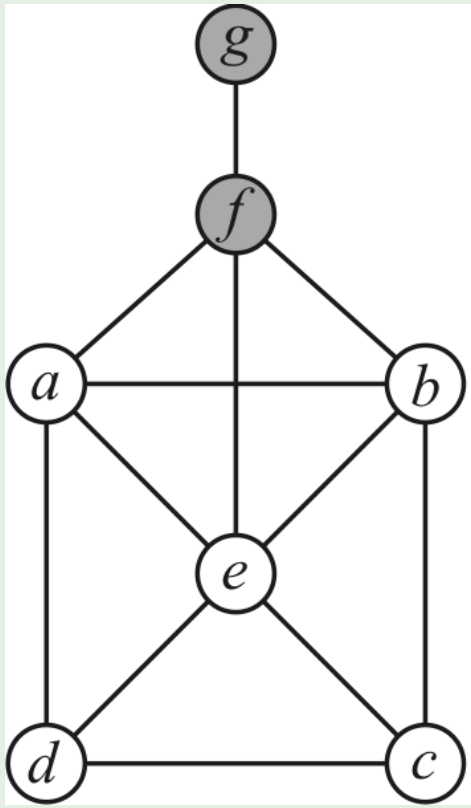




G

$a : b, d, e, \boldsymbol{f}$
$b : a, c, e, \boldsymbol{f}$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : a, b, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

Príklad

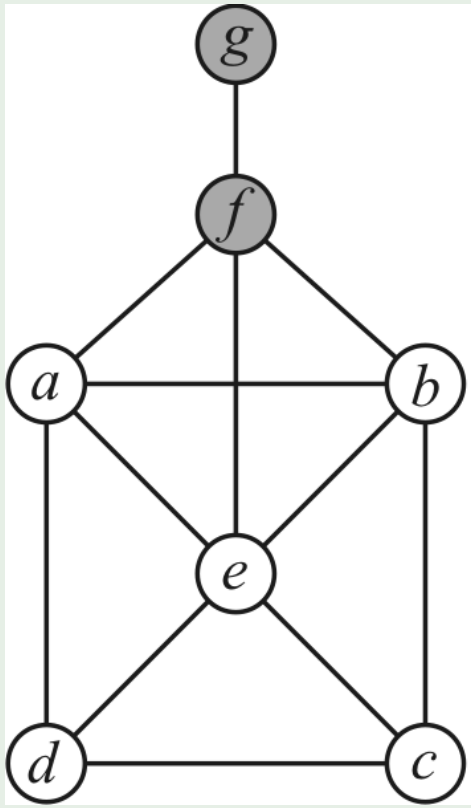


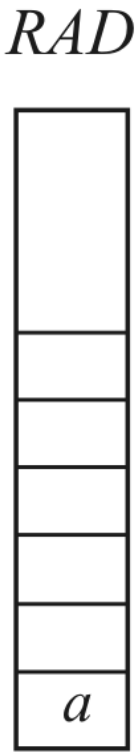
RAD

G

$a : b, d, e, \boldsymbol{f}$
$b : a, c, e, \boldsymbol{f}$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : a, b, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

Príklad

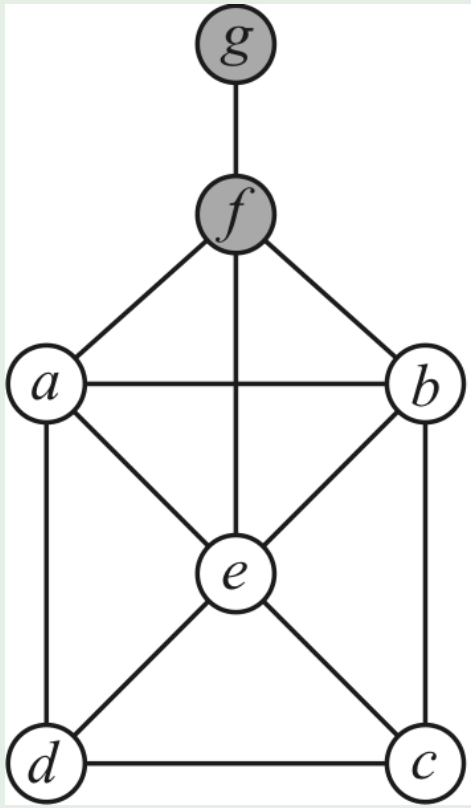


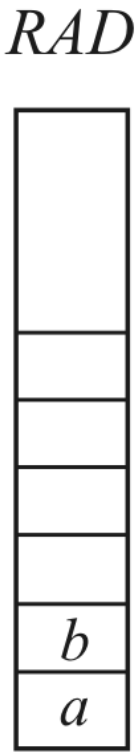


G

$\boldsymbol{a}$: b, d, e, $\boldsymbol{f}$
b : $\boldsymbol{a}$, c, e, $\boldsymbol{f}$
c : b, d, e
d : $\boldsymbol{a}$, c, e
e : $\boldsymbol{a}$, b, c, d, $\boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{a}$, b, e, $\boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{f}$

Príklad

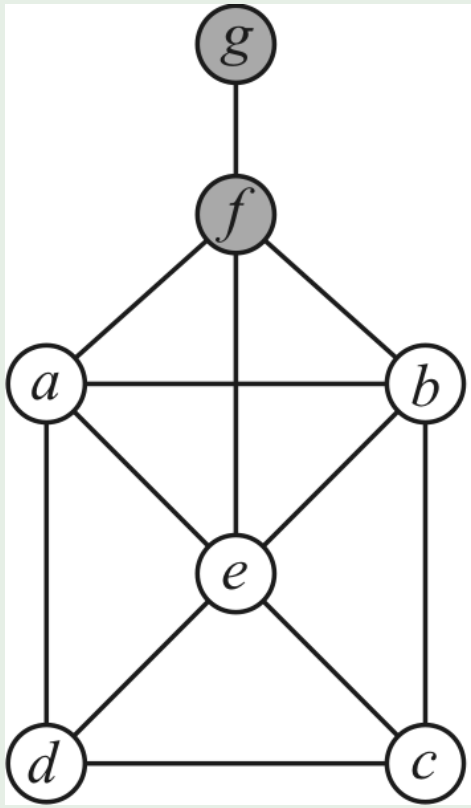


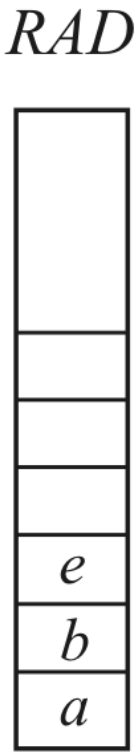


G

$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}, d, e, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}, c, e, \boldsymbol{f}$
$c : \boldsymbol{b}, d, e$
$d : \boldsymbol{a}, c, e$
$e : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

Príklad

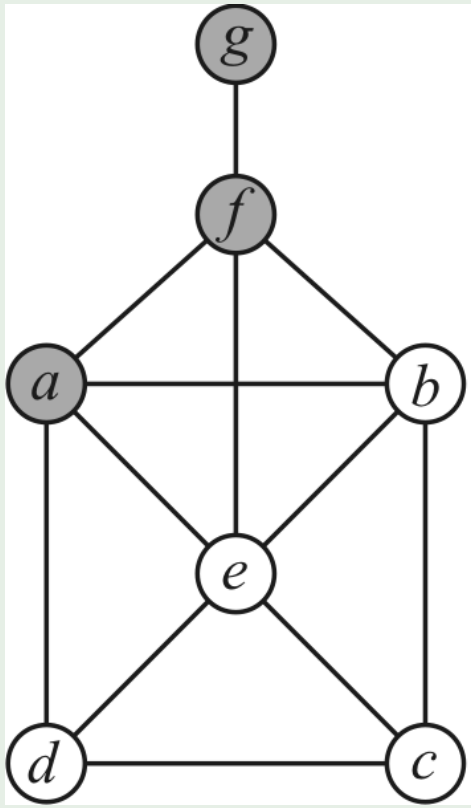


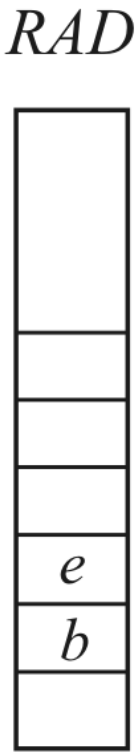


G

$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}, d, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}, c, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$
$c : \boldsymbol{b}, d, \boldsymbol{e}$
$d : \boldsymbol{a}, c, \boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{e} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

Príklad

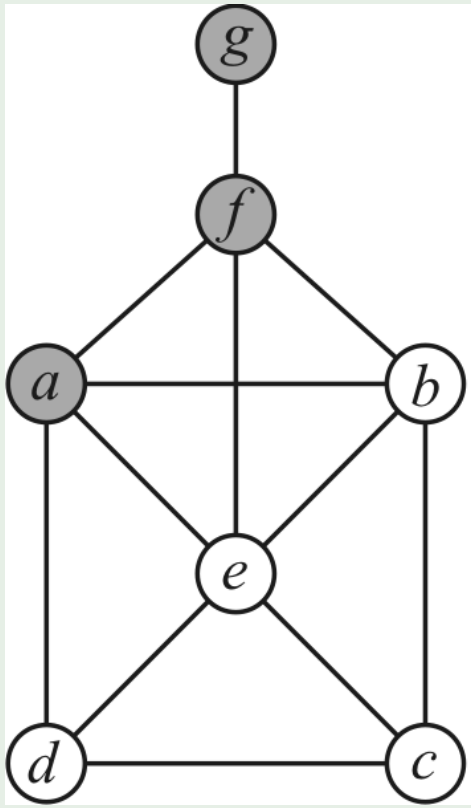


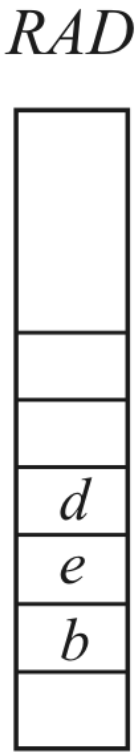


G

$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}, d, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{b} : \boldsymbol{a}, c, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$
$c : \boldsymbol{b}, d, \boldsymbol{e}$
$d : \boldsymbol{a}, c, \boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{e} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

Príklad

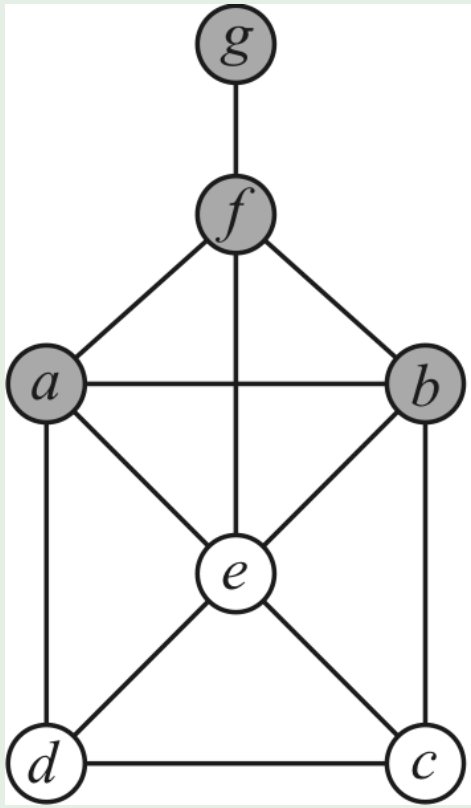


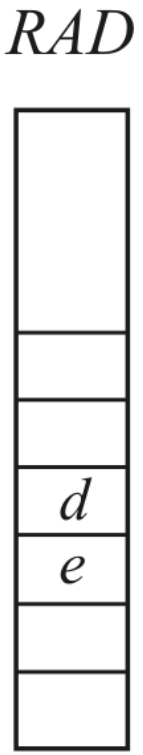


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

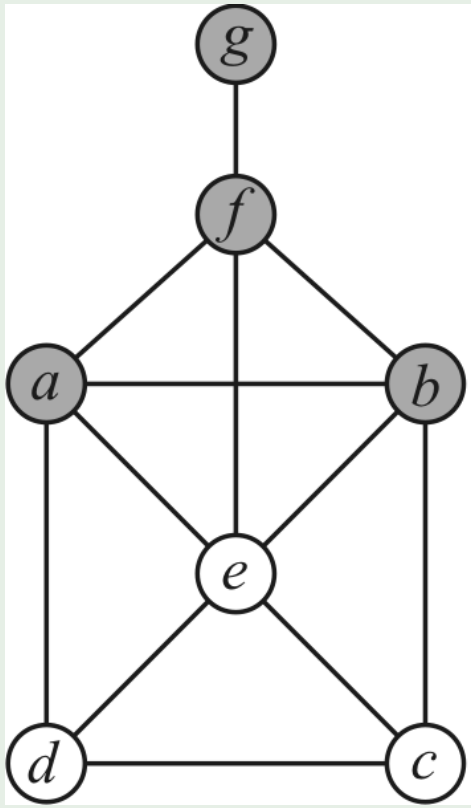


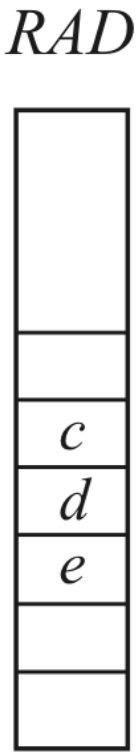


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

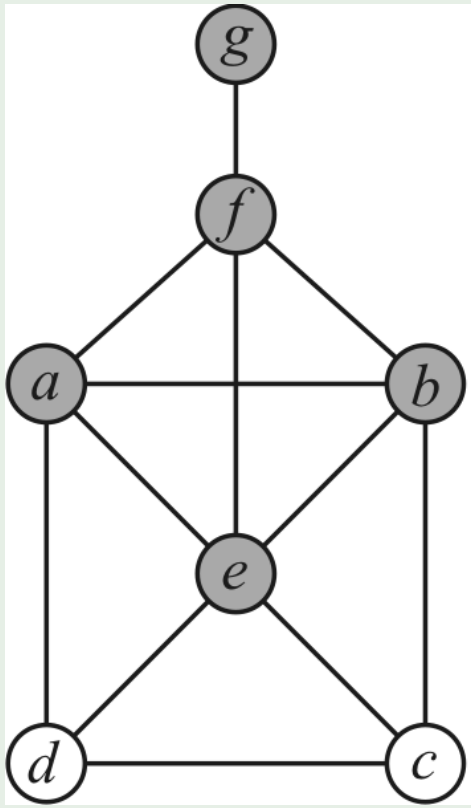


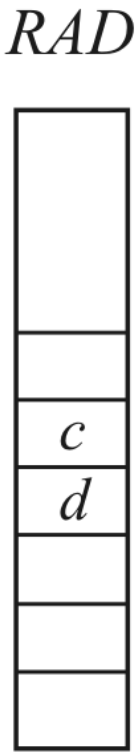


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

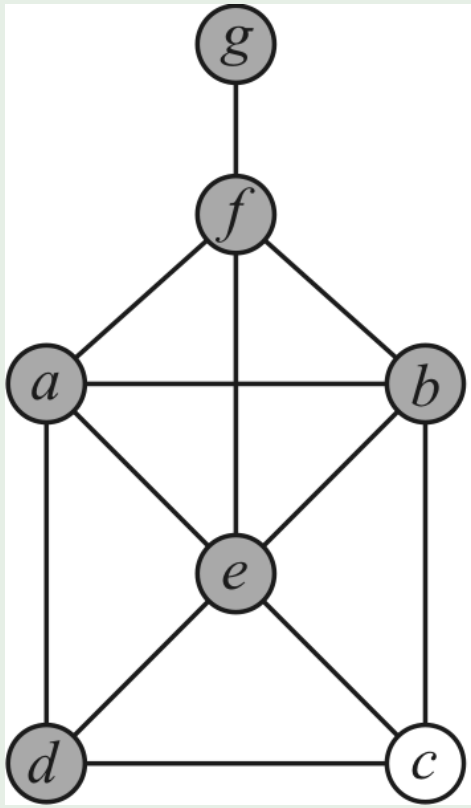


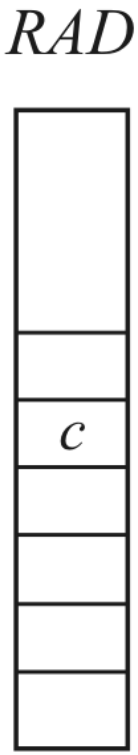


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad

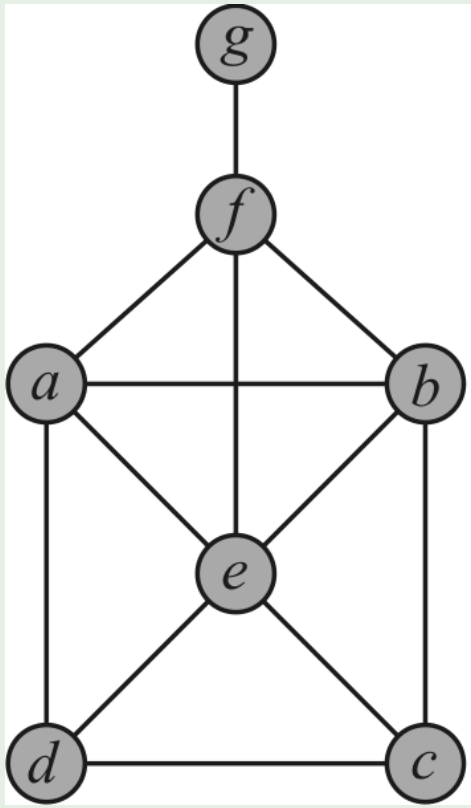


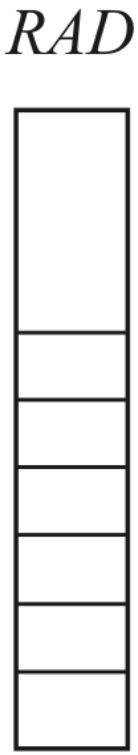


G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

Príklad





G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$