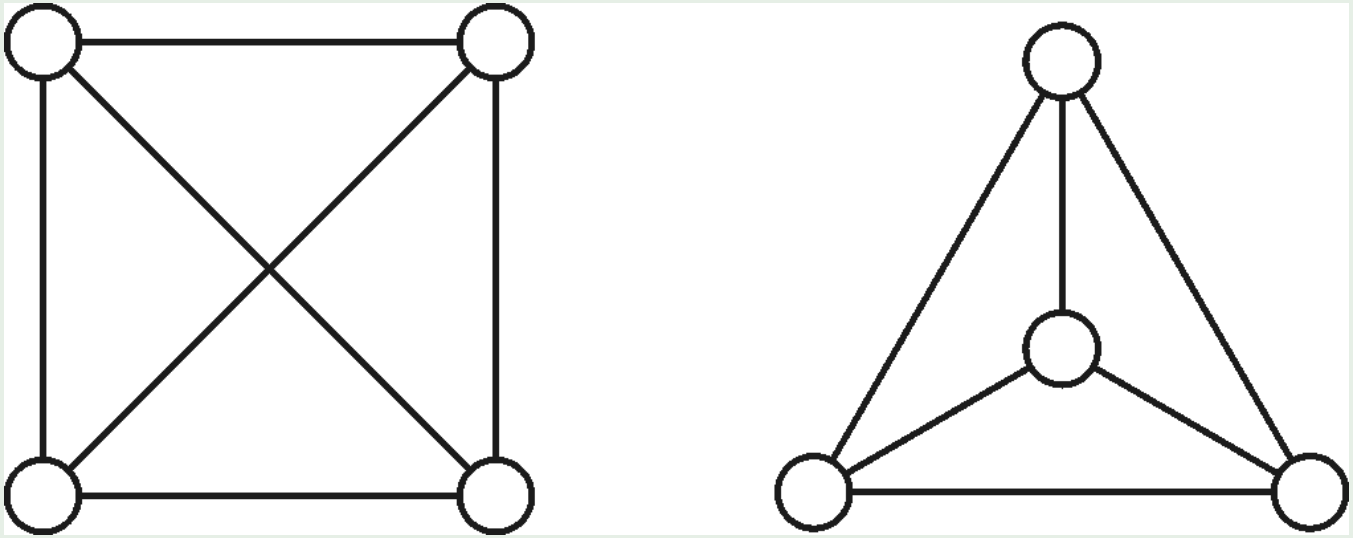
Planárne a rovinné grafy

Definícia

Graf G sa nazýva planárny, *ak existuje jeho nakreslenie D, v ktorom sa žiadne dve hrany nepretínajú. D sa potom nazýva* rovinný graf.

Príklad

Dve nakreslenia grafu K_4:



Nakreslenie vľavo je planárne, ale nie rovinné.

História - rekreačná matematika, problém štyroch farieb (19. stor.)

Problém piatich kráľovstiev (A.F. Möbius, 1840)

Istý kráľ mal 5 synov; podľa jeho vôle mali synovia po jeho smrti rozdeliť kráľovstvo na 5 častí tak, aby každá časť mala spoločnú hranicu so všetkými ostatnými časťami (pozn. hranica nesmie pozostávať z "jediného bodu"). Je to možné?

Problém služieb (utility problem, H. Dudeney, 1913)

Do troch rôznych domov treba zaviesť elektrinu, plyn a vodu z troch výrobní tak, aby sa jednotlivé vedenia nekrížili. Je to možné?

Problém štyroch farieb (F. Guthrie, 1852)

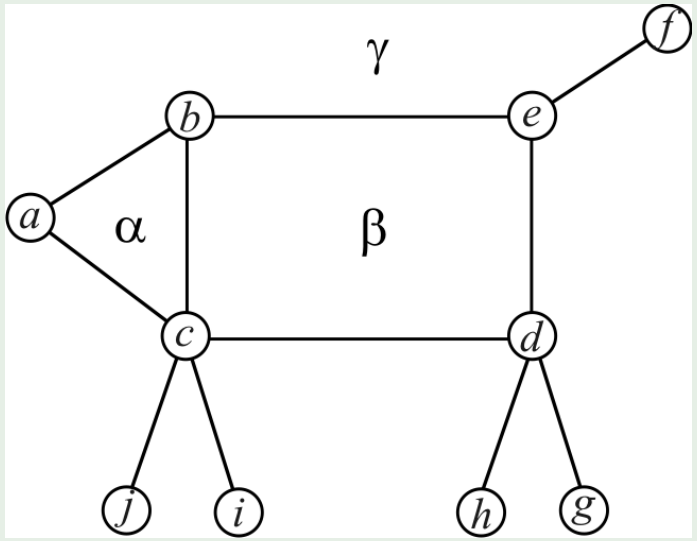
Je možné štáty každej politickej mapy zafarbiť pomocou najviac štyroch farieb tak, aby žiadne dva štáty so spoločnou hranicou nemali tú istú farbu?

Z geometrického hľadiska je rovinný graf G nejaká množina bodov roviny (tvorená jednoduchými krivkami, ktoré majú spoločné koncové body). Množina $\mathbb{R}^2 \setminus G$ potom pozostáva z niekoľkých súvislých otvorených množín, ktoré sa nazývajú *steny*. Z nich je práve jedna neohraničená; táto sa nazýva *vonkajšia stena* G, ostatné steny sú *vnútorné steny*. Množinu všetkých stien G označujeme $F(G)$.

Pre rovinný graf G možno tiež definovať binárnu reláciu susednosti stien na množine $F(G)$ (dve steny sú susedné, ak majú spoločnú hranu) a binárne relácie incidencie stien s vrcholmi resp. hranami (presná definícia využíva topologický pojem hranice množiny).

Example

Príklad

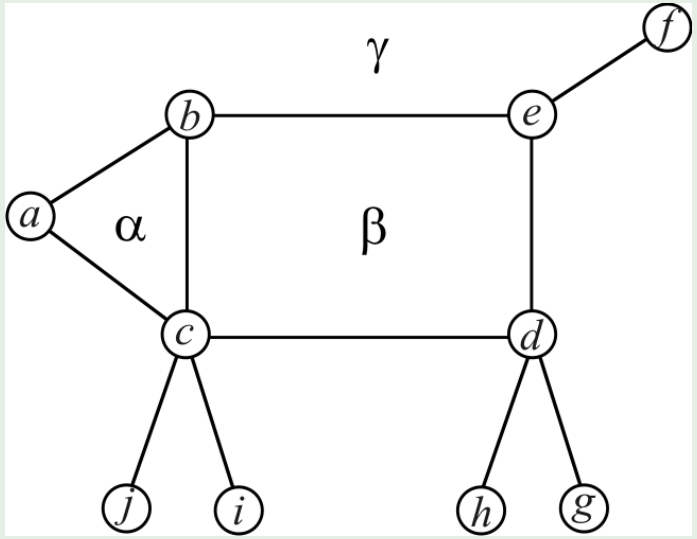


Stena α inciduje s vrcholmi a, b, c a s hranami ab, bc, ca.

Definícia

Nech G je rovinný graf a $\alpha \in F(G)$. Stupeň *steny α je počet hrán incidentných s α, pričom každý most sa započítava dvakrát.*

Príklad



Stena α má stupeň 3, stena β štyri a stena γ 15.

Lema

Nech G je rovinný graf s m hranami. Potom $\sum_{f \in F(G)} \deg(f) = 2m$.

Dôkaz: Ak hrana e rovinného grafu G je most, tak do stupňa incidujúcej steny sa započíta dvakrát. Každá iná hrana rovinného grafu sa započíta raz do stupňa každej z dvoch stien, ktoré s ňou incidujú. Teda celkovo je každá hrana v $\sum_{f \in F(G)} \deg(f)$ započítaná dvakrát.

Veta (Euler 1752)

Nech G je súvislý rovinný graf s n vrcholmi, m hranami a s stenami. Potom $n + s = m + 2$.

Dôkaz: matematickou indukciou podľa počtu k kružníc grafu.

1° : Ak $k = 0$, tak graf G je strom (je súvislý a bez kružníc), teda platí $m = n - 1$. Ďalej, každý rovinný diagram G má jedinú stenu (to sa dokáže napr. matematickou indukciou podľa počtu vrcholov stromu: tvrdenie zrejme platí pre izolovaný vrchol. Každý väčší strom T obsahuje visiaci vrchol x incidentný s hranou xy; po jeho odobratí získame menší strom $T - x$, ktorý má podľa indukčného predpokladu rovinné nakreslenie. Visiaci vrchol x potom možno pridať späť do "malého" okolia y tak, aby hrana s ním incidentná nepretínala iné hrany). Teda platí
$n + s = n + 1 = (n - 1) + 2 = m + 2$.

2° : Nech tvrdenie platí pre všetky súvislé rovinné grafy s menej ako k kružnicami a nech G je súvislý rovinný graf, ktorý má $k > 0$ kružníc. Potom existuje hrana e patriaca nejakej kružnici v G. Graf $G - e$ je súvislý (odobratie kružnicovej hrany súvislosť nepokazí), rovinný (je podgrafom rovinného grafu G), má $n' = n$ vrcholov, $m' = m - 1$ hrán a $s' = s - 1$ stien (e inciduje s dvoma stenami, ktoré sa po odstránení e spoja do jedinej steny). Podľa indukčného predpokladu potom platí $n' + s' = m' + 2$, z čoho $n + (s - 1) = (m - 1) + 2$, teda $n + s = m + 2$.

Dôsledok

Graf K_5 nie je planárny.

Dôkaz: Sporom - nech existuje rovinné nakreslenie grafu K_5. Toto nakreslenie má potom 5 vrcholov a 10 hrán, teda má $10 + 2 - 5 = 7$ stien. Každá stena inciduje s aspoň tromi hranami, preto $\sum_{x \in F(K_5)} \deg(x) \geq 7 \cdot 3 = 21$. Zároveň však $\sum_{x \in F(K_5)} \deg(x) = 2|E(K_5)| = 2 \cdot 10 = 20$, čo je spor.

Dôsledok

Graf $K_{3,3}$ nie je planárny.

Dôkaz: Sporom - nech existuje rovinné nakreslenie grafu $K_{3,3}$. Toto nakreslenie má potom 6 vrcholov a 9 hrán, teda má $9 + 2 - 6 = 5$ stien. Keďže $K_{3,3}$ je bipartitný graf, tak neobsahuje kružnice dĺžky 3 a teda každá stena inciduje s aspoň štyrmi hranami; preto $\sum_{x \in F(K_5)} \deg(x) \geq 5 \cdot 4 = 20$. Zároveň však $\sum_{x \in F(K_5)} \deg(x) = 2|E(K_{3,3})| = 2 \cdot 9 = 18$, čo je spor.

Dôsledok

Nech $n \geq 3$ a nech G je planárny n-vrcholový graf s m hranami. Potom $m \leq 3n - 6$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď každá stena G má stupeň 3.

Dôkaz: stačí dokazovať pre súvislé grafy. Uvažujme rovinné nakreslenie G, ktoré má s stien. Každá stena G inciduje s aspoň tromi hranami, preto $\sum_{f \in F(G)} \deg(f) \geq \sum_{f \in F(G)} 3 = 3s$. Na druhej strane, $\sum_{f \in F(G)} \deg(x) = 2m$, teda platí $2m \geq 3s$. Podľa Eulerovej vety je $n + s = m + 2$, teda $3n + 3s = 3m + 6$. Z toho vyplýva $3m + 6 \leq 3n + 2m$, teda $m \leq 3n - 6$. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $2m = 3s$, čo je práve vtedy, keď každá stena G má stupeň rovný 3.

Dôsledok

Každý planárny graf obsahuje vrchol stupňa najviac 5; hranica 5 je najlepšia možná.

Dôkaz: Nech G je n-vrcholový planárny graf s m hranami. Potom

$$n \cdot \delta = \sum_{x \in V(G)} \delta \leq \sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2m \leq 2(3n-6) = 6n - 12$$

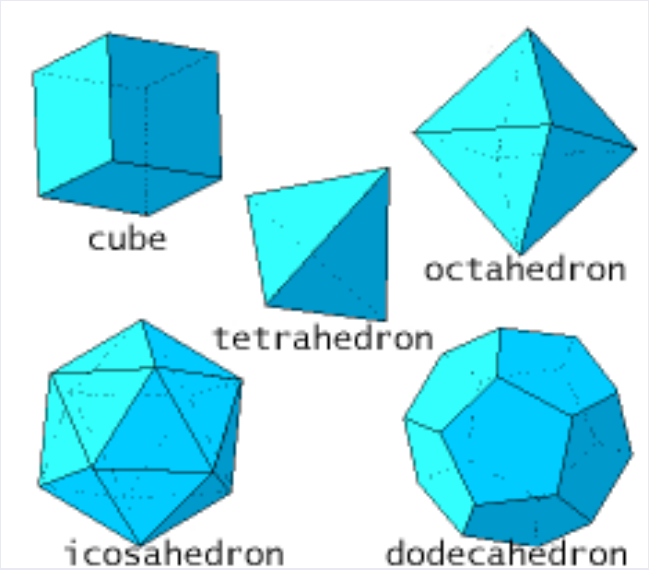
teda

$$\delta \leq \frac{6n-12}{n} = 6 - \frac{12}{n} < 6$$

z čoho vyplýva $\delta \leq 5$.
Graf pravidelného dvadsaťstena je rovinný a 5-regulárny, teda hranica 5 v tvrdení je najlepšia možná.

Dôsledok

Existuje práve päť pravidelných mnohostenov: pravidelný štvorsten, kocka, osemsten, dvanásťsten a dvadsaťsten:



Dôkaz: Ak je mnohosten M pravidelný, tak jeho graf $G(M)$ je rovinný, p-regulárny a každá stena má stupeň q (pre nejaké p, q). Nech $G(M)$ má n vrcholov, m hrán a s stien. Platí $2m = np, 2m = sq$. Po vyjadrení n, s a dosadení do Eulerovho vzorca dostávame

$$\frac{2m}{p} + \frac{2m}{q} - m = 2$$

$$m\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right) = 2$$

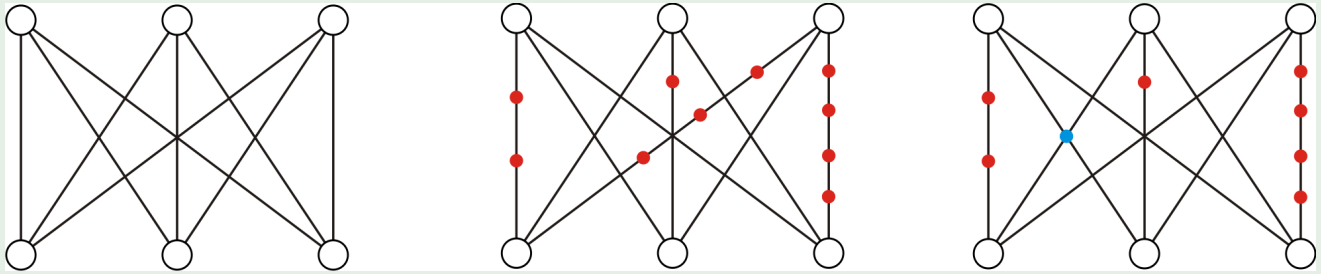
Je teda $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1 > 0$, z čoho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Teda nemôže súčasne platiť $p \geq 4, q \geq 4$; z toho dostávame, že (p, q) je niektorá z piatich dvojíc:

- $(3,3)$: pravidelný štvorsten
- $(3,4)$: kocka
- $(3,5)$: pravidelný dvanásťsten
- $(4,3)$: pravidelný osemsten
- $(5,3)$: pravidelný dvadsaťsten

Definícia

Graf H je podrozdelením *grafu G, ak ho možno získať z G pridaním vrcholov stupňa 2 na hrany G (t.j. nahradením hrán G cestami).*

Príklad



Prostredný graf je podrozdelením ľavého, avšak graf napravo nie.

Veta (Kuratowski 1930)

Graf je planárny práve vtedy, keď neobsahuje ako podgraf podrozdelenie grafu K_5 ani $K_{3,3}$.