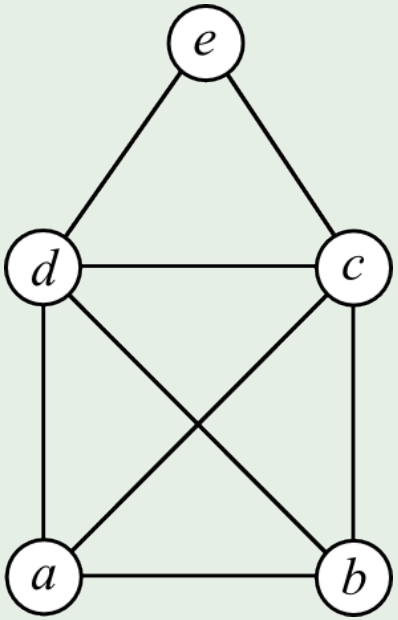
Eulerovské grafy

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf. Uzavretý ťah v* G *sa nazýva* eulerovská kružnica, *ak obsahuje všetky hrany* G. *Otvorený ťah obsahujúci všetky hrany grafu sa nazýva* eulerovská cesta. *Graf sa nazýva* eulerovský, *ak obsahuje eulerovskú kružnicu.*

Príklad

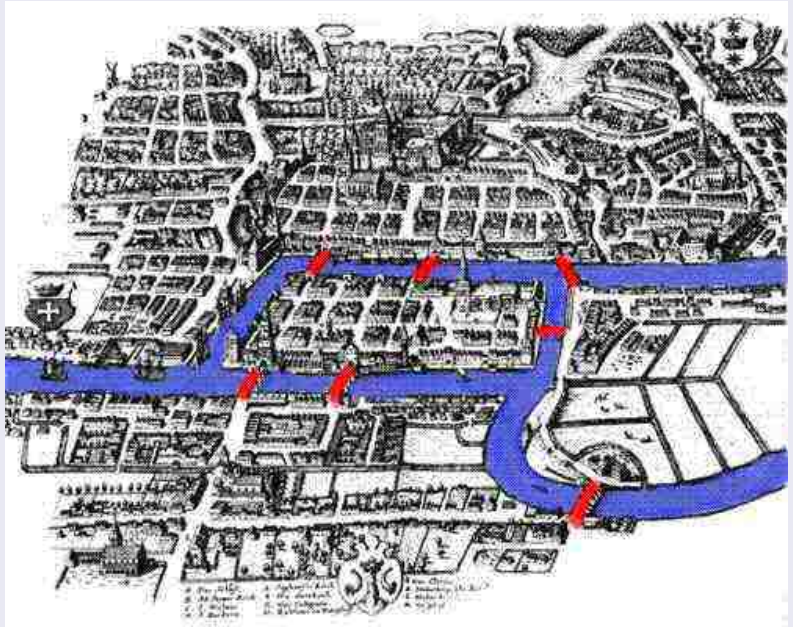


Daný graf nie je eulerovský, ale obsahuje eulerovskú cestu $(a, ab, b, bc, c, cd, d, da, a, ac, c, ce, e, ed, d, db)$.

História - problém siedmich mostov mesta Kráľovec (Königsberg, dnešný Kaliningrad):

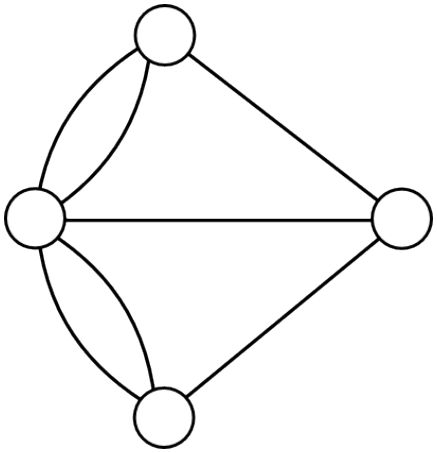
Problém

Cez Kráľovec preteká rieka Pregel, v ktorej sa nachádzajú dva riečne ostrovy. V r. 1736 boli tieto ostrovy spojené navzájom a s oboma brehmi rieky pomocou siedmich mostov:



Je možné prejsť po každom z mostov práve raz a vrátiť sa na miesto, z ktorého sme vyšli?

Problém je ekvivalentný s nájdením eulerovskej kružnice v znázornenom multigrafe:



L. Euler v r. 1736 dokázal, že daný problém nemá riešenie (v danom multigrafe dokonca neexistuje ani eulerovská cesta).

Lema

Ak G je graf s $\delta(G) \geq 2$, tak G obsahuje kružnicu.

Dôkaz: Nech $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je najdlhšia cesta v G. Keďže $\deg(v_k) \geq 2$, existuje hrana $v_k y, y \neq v_{k-1}$. Potom však $y \in \{v_1, \ldots, v_{k-2}\}$ (inak by bolo možné P predĺžiť o $v_k y$, čo je spor), teda $(y, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k, v_k y, y)$ tvorí kružnicu v G.

Veta

Nech G je súvislý graf. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *G je eulerovský*

(ii) *každý vrchol G má párny stupeň*

(iii) $E(G) = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$, *pričom pre $i \neq j$ je $E_i \neq E_j$ a E_i je hranová množina nejakej kružnice v G (t.j. G je zjednotením hranovo disjunktných kružníc).*

Dôkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nech G je eulerovský graf a $S = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_0)$ je eulerovská kružnica v G. Ak $v_i \neq v_0$, tak každý výskyt v_i v zápise S prispieva 2 ku stupňu vrchola v_i, a teda stupeň v_i je párny. Rovnaká úvaha platí aj pre výskyt v_0 vnútri S; prvá hrana e_1 a posledná hrana e_k tiež dokopy prispievajú 2 ku stupňu v_0, a teda aj tento stupeň je párny.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nech každý vrchol G má párny stupeň a G je súvislý. Potom $\delta(G) \geq 2$, teda G obsahuje kružnicu C. Ďalej postupujeme úplnou matematickou indukciou podľa počtu kružníc grafu. Uvažujme graf $G - E(C)$, ktorý vznikne z G odstránením všetkých hrán C; nech $G_1, \ldots, G_r$ sú komponenty G. Platí, že všetky vrcholy $G - E(C)$ majú párny stupeň (vrcholom z $V(C)$ klesol stupeň o 2, ostatným sa nezmenil). Teda každý komponent G_i je buď izolovaný vrchol, alebo je to súvislý graf, ktorý má len vrcholy párnych stupňov a má menej kružníc, ako G. Podľa indukčného predpokladu je G_i zjednotením hranovo disjunktných kružníc $C_i^{(1)}, \ldots, C_i^{(n_i)}$. Potom $C \cup \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{n_i} C_i^{(j)}$ je systém hranovo disjunktných kružníc, ktorých zjednotením je G.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nech $\bigcup_{i=1}^{p} C_i$ je systém hranovo disjunktných kružníc, ktorých zjednotenie je G, pričom ich indexy sú zvolené tak, že pre každé $i = 1, \ldots, p-1$ je $V(C_{i+1}) \cap \bigcup_{j=1}^{i} V(C_j) \neq \emptyset$. Definujme podgrafy $T_1, \ldots, T_p \subseteq G$ nasledovne: $T_1 := C_1, T_{i+1} := T_i \cup C_{i+1}$. Potom platí, že každý podgraf T_i je sám osebe eulerovský (dokážeme matematickou indukciou podľa i. Tvrdenie zrejme platí pre $i = 1$; ak platí pre $i = l$ a $x_{l+1} = V(T_l) \cap V(C_{l+1})$, tak eulerovskú kružnicu v T_{l+1} možno získať zreťazením eulerovských kružníc v T_l a C_{l+1} cez vrchol x_{l+1}), teda aj $T_p = G$ je eulerovský.

Predchádzajúca veta platí aj pre súvislé multigrafy.

Dôsledok

Ak súvislý graf má $2k$ vrcholov nepárneho stupňa, tak množinu jeho hrán možno rozložiť na k navzájom (hranovo) disjunktných otvorených ťahov, z ktorých každý začína aj končí vo vrchole nepárneho stupňa.

Hľadanie eulerovských kružníc v grafe

Definícia

Hrana e v grafe $G = (V, E)$ sa nazýva most, *ak $G - e$ má viac komponentov ako G.*

Lema

Nech G je graf, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa. Potom G neobsahuje most.

Dôkaz: Sporom - nech existuje graf G s vrcholmi párnych stupňov, ktorý obsahuje most $e = uv$. Nech e patrí komponentu G' grafu G. Graf G' je súvislý, teda $G' - e$ je nesúvislý a pozostáva z dvoch komponentov G'_1, G'_2. Jeden z týchto komponentov obsahuje vrchol u, druhý v; navyše však obidva komponenty obsahujú jediný vrchol nepárneho stupňa (u resp. v), čo je spor.

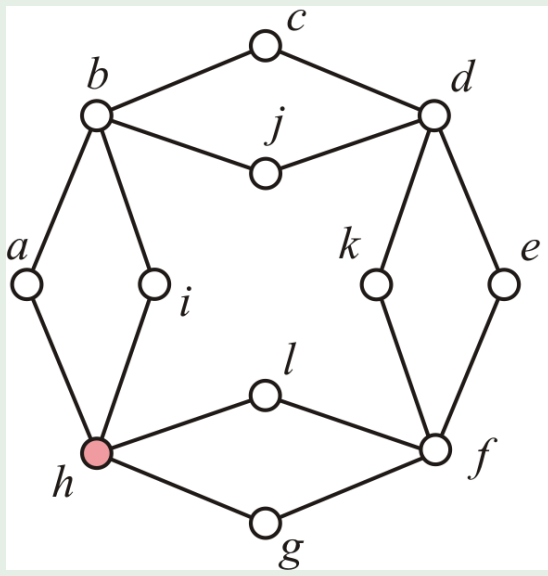
Princíp hľadania eulerovskej kružnice v grafe - začneme z ľubovoľného vrchola; ak už máme zostrojenú časť eulerovskej kružnice T_i (t.j. postupnosť $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i)$ vrcholov a hrán eulerovského ťahu), tak ako ďalšiu hranu $e_{i+1} = v_i v_{i+1}$ do T_{i+1} *prednostne* vyberáme takú hranu incidentnú s v_i, ktorá nie je mostom grafu $G \setminus E(T_i)$.

Algoritmus pre nájdenie eulerovského ťahu (Fleury)

VSTUP: eulerovský graf $G = (V, E)$
VÝSTUP: eulerovská kružnica T v G

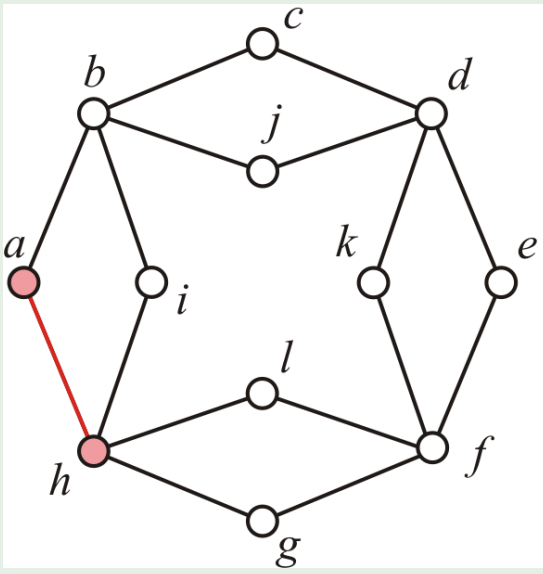
$v_0 := x \in V$ ľubovoľný
$T_0 := (v_0)$
pre $(i = 0..m)$ opakuj
    $M_i := E \setminus E(T_i)$
    ak (existuje $e_{i+1} \in M_i :\ v_i \in e_{i+1}$ a #Komp$((V, E \setminus E(T_i))) =$ #Komp$((V, (E \setminus E(T_i)) \cup e_{i+1})))$ tak
        $T_{i+1} := T_i + e_{i+1} + (e_{i+1} \setminus \{v_i\})$ /* predĺženie ťahu */
    inak
        vyber $e_{i+1} \in M_i :\ v_i \in e_{i+1}$
        $T_{i+1} := T_i + e_{i+1} + (e_{i+1} \setminus \{v_i\})$

Príklad

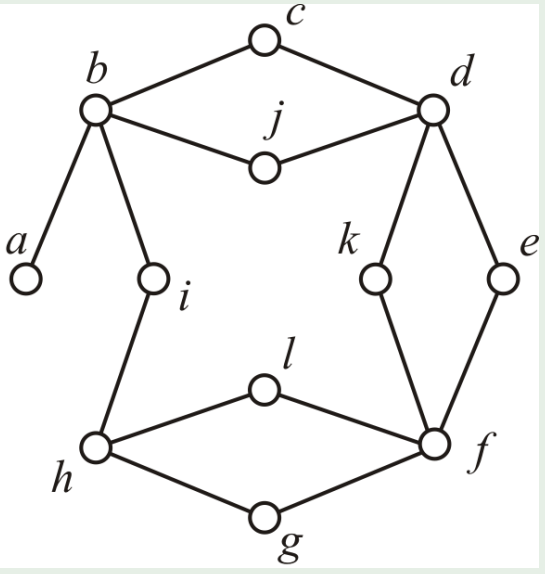


$T_0 = (h)$
$v_0 = h$

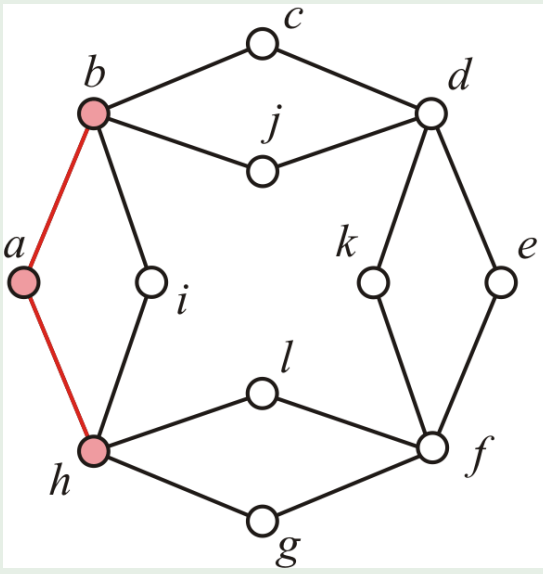
Príklad



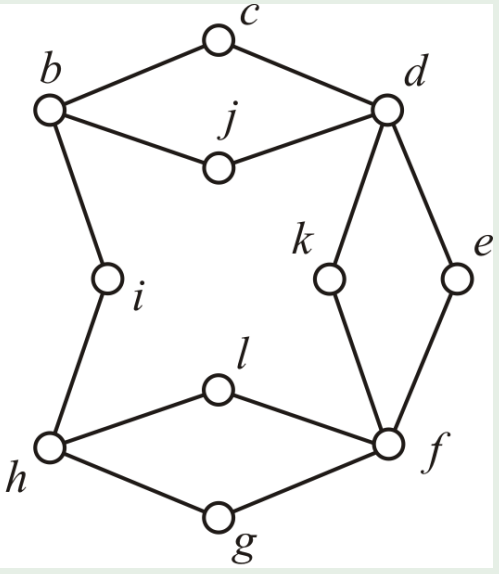
$T_l = (h, ha, a)$



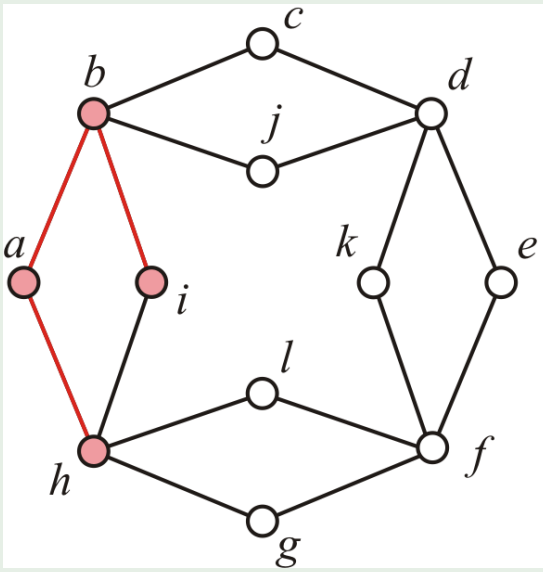
Príklad



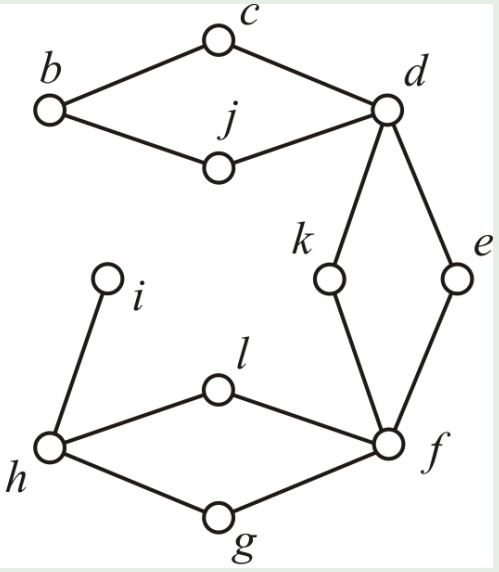
$T_2 = (h, ha, a, ab, b)$



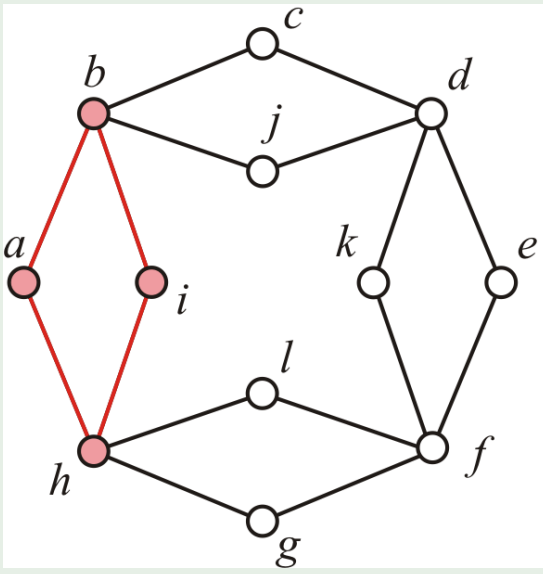
Príklad



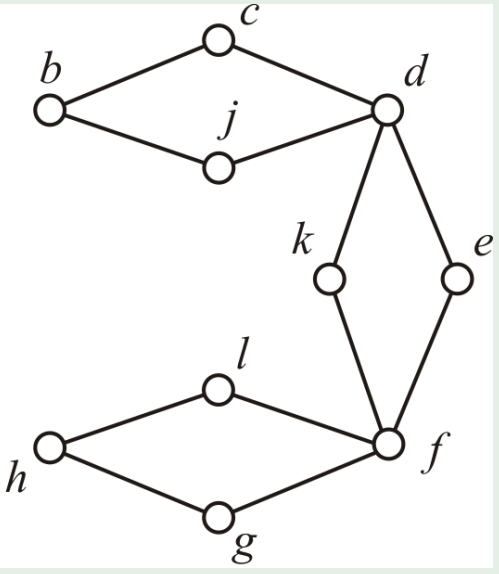
$T_3 = (h, ha, a, ab, b, bi, i)$



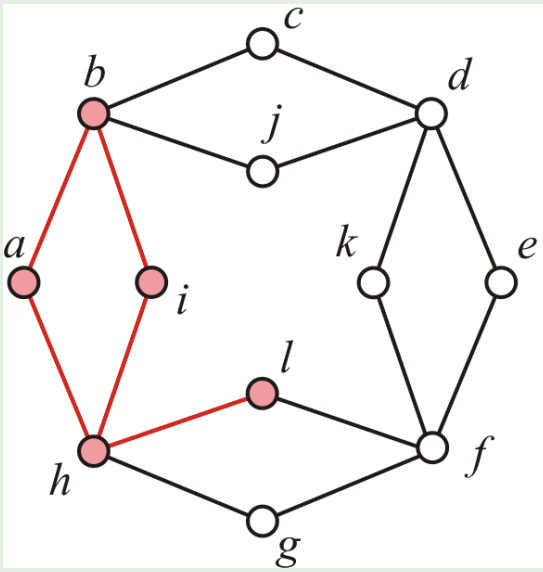
Príklad



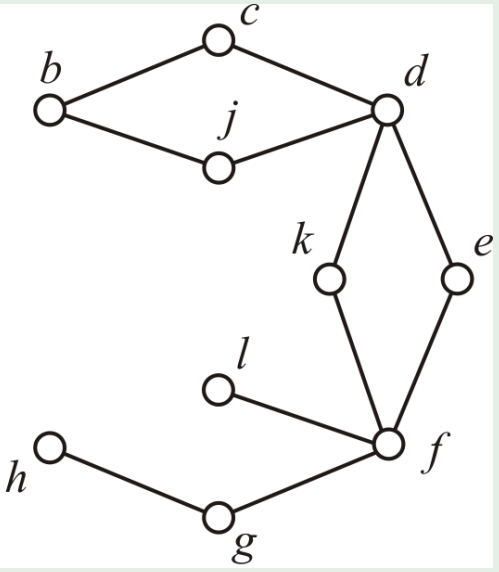
$T_4 = (h, ha, a, ab, b, bi, i, ih, h)$



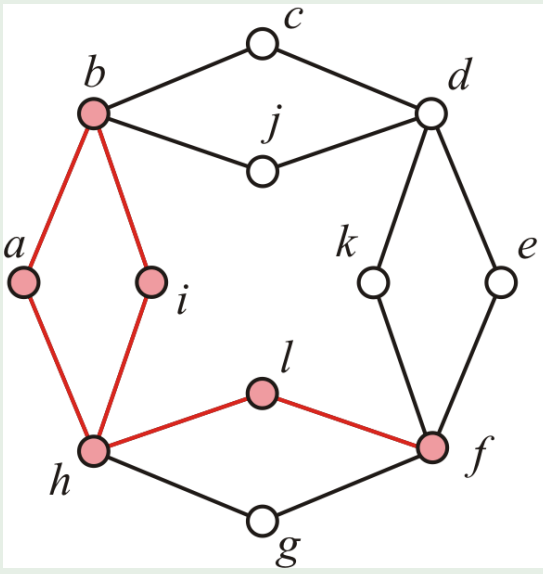
Príklad



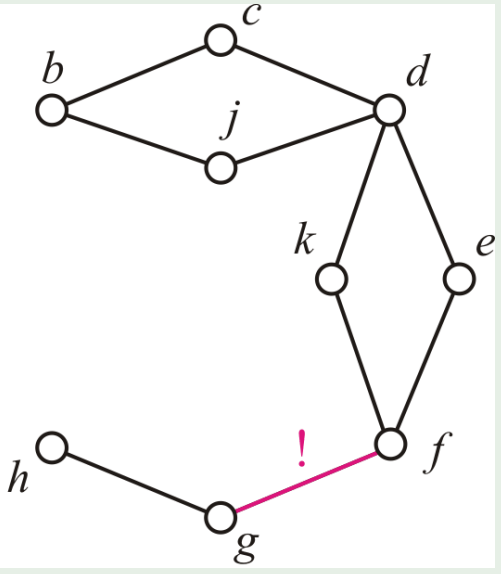
$T_5 = (h, ha, a, ab, b,$
$bi, i, ih, h, hl, l)$



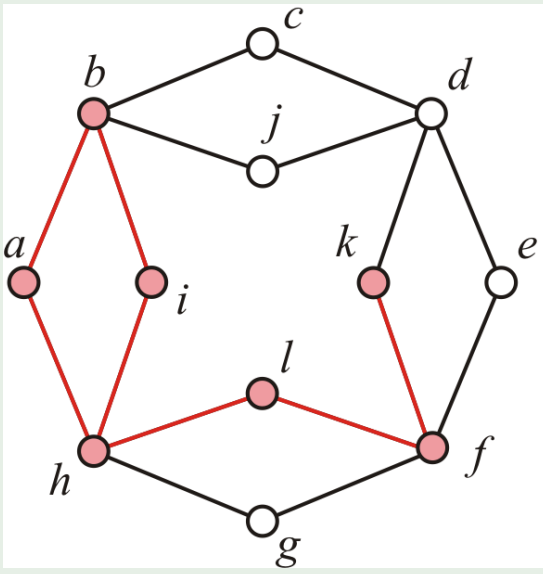
Príklad



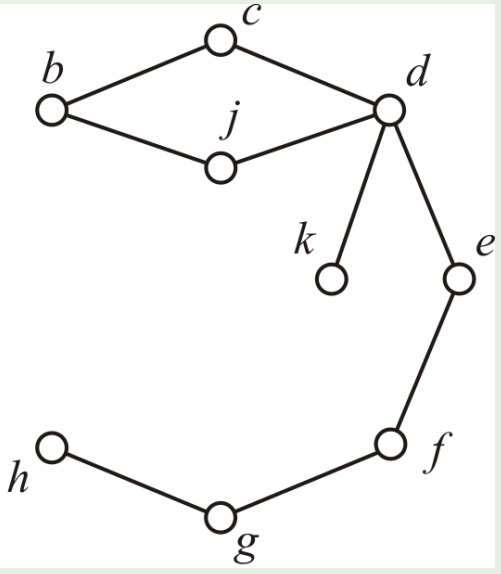
$T_6 = (h, ha, a, ab, b, bi, i, ih, h, hl, l, lf, f)$



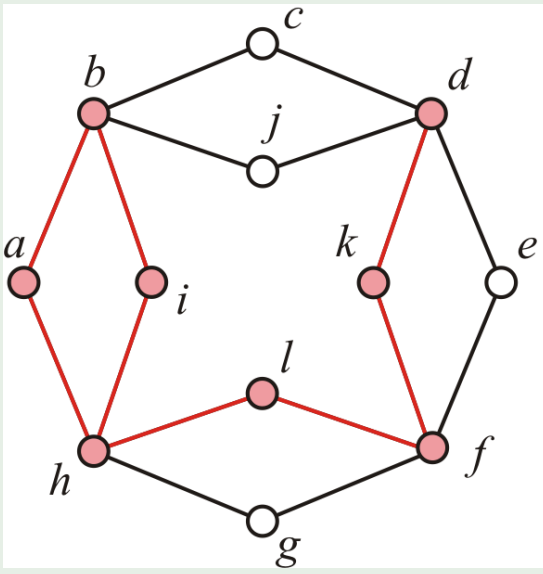
Príklad



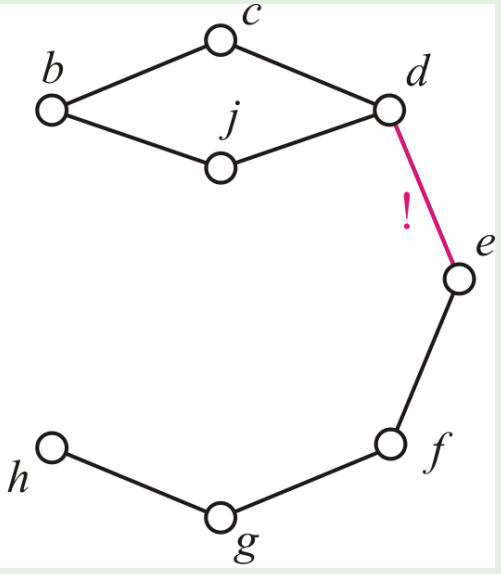
$T_7 = (h, ha, a, ab, b,$
$bi, i, ih, h, hl, l,$
$lf, f, fk, k)$



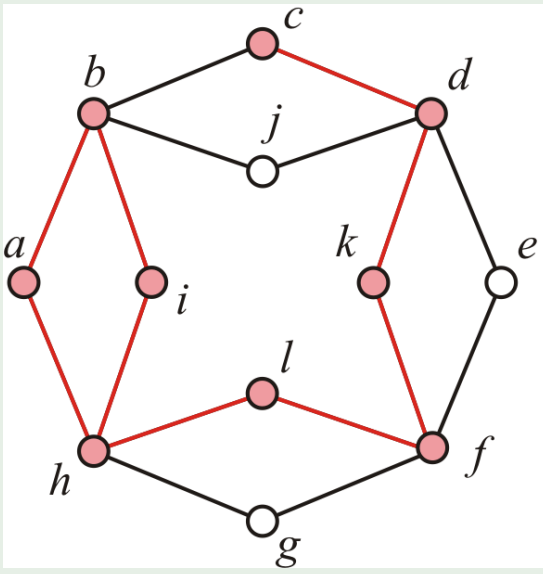
Príklad



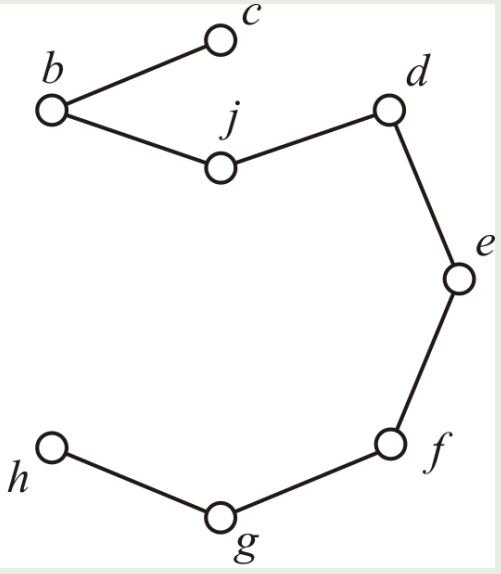
$T_8 = (h, ha, a, ab, b,$
$bi, i, ih, h, hl, l,$
$lf, f, fk, k, kd, d)$



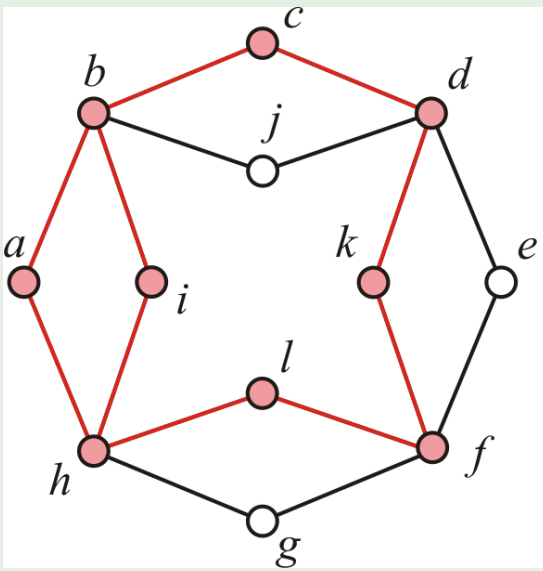
Príklad



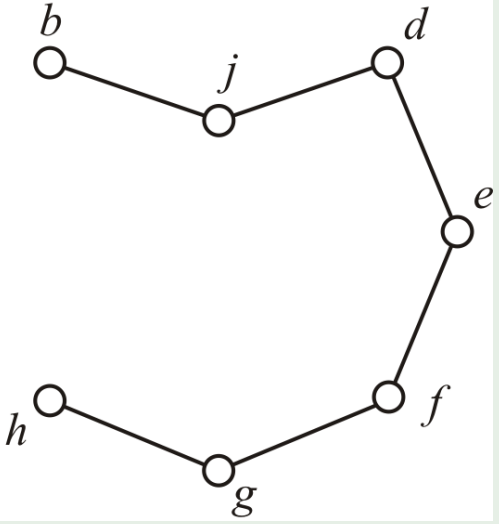
$T_9 = (h, ha, a, ab, b,$
$bi, i, ih, h, hl, l,$
$lf, f, fk, k, kd, d,$
$dc, c)$



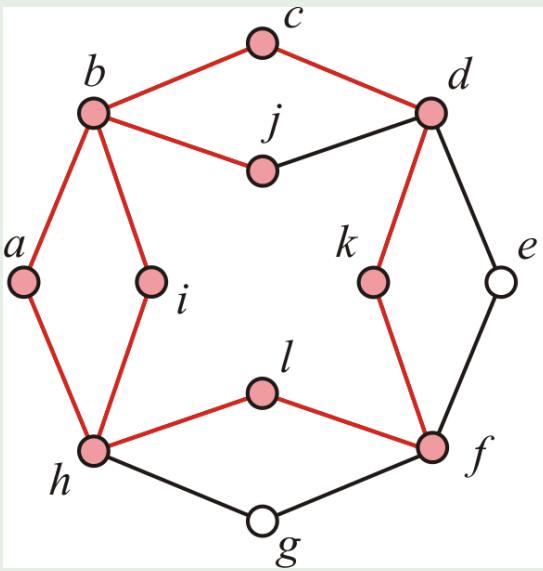
Príklad



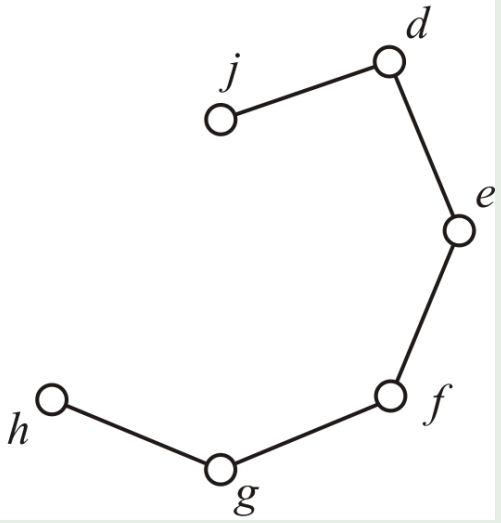
T_{10} = (*h, ha, a, ab, b, bi, i, ih, h, hl, l, lf, f, fk, k, kd, d, dc, c, cb, b*)



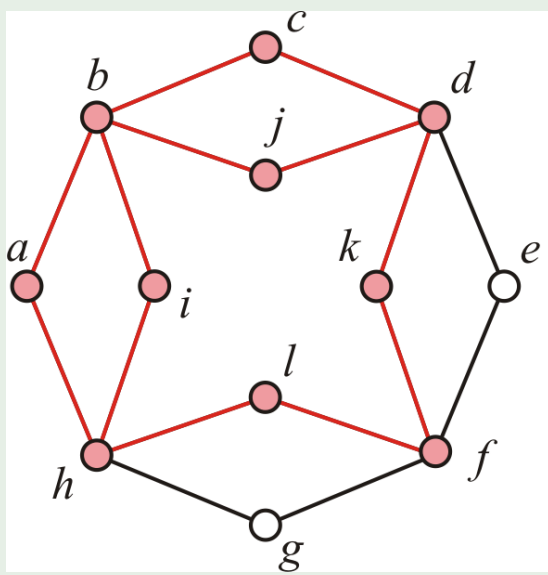
Príklad



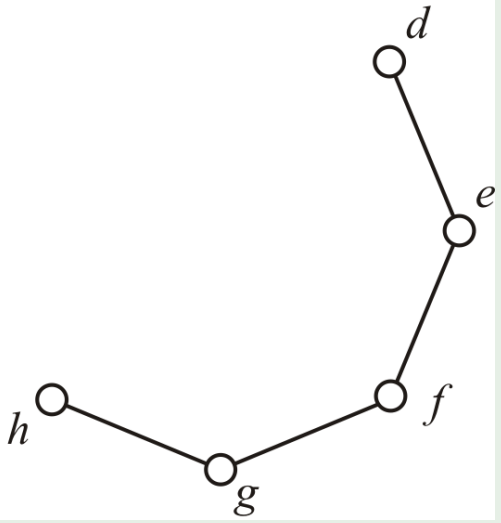
T_{11} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j)



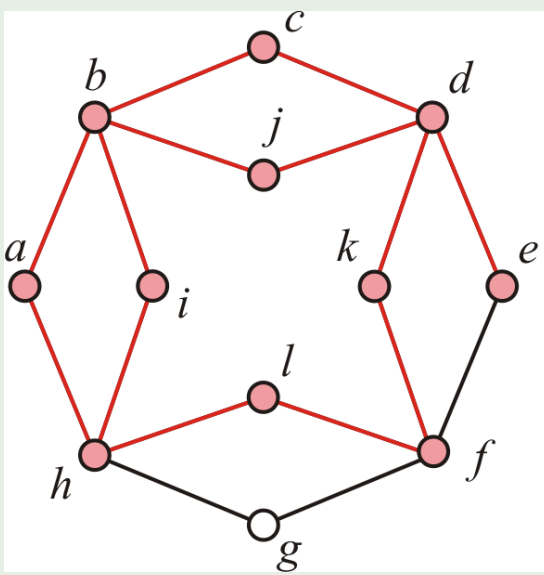
Príklad



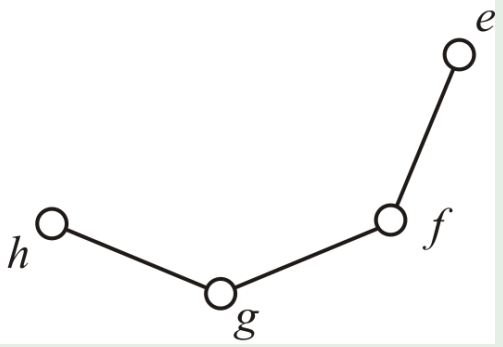
T_{12} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j,
jd, d)



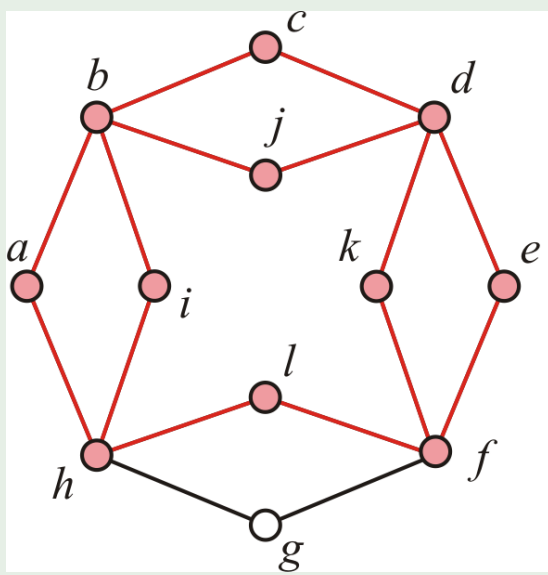
Príklad



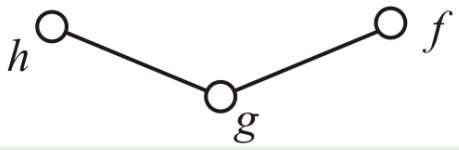
T_{13} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j,
jd, d, de, e)



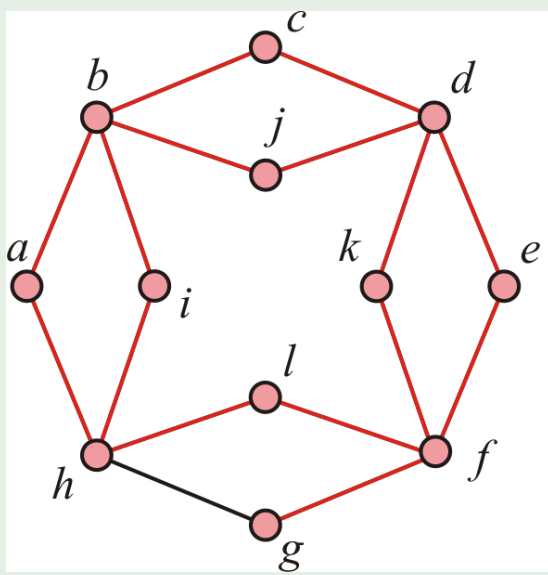
Príklad



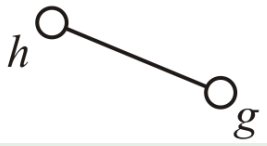
T_{14} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j,
jd, d, de, e, ef, f)



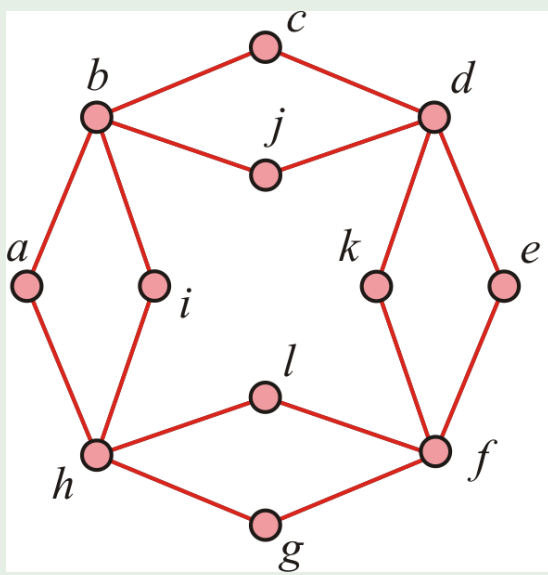
Príklad



T_{15} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j,
jd, d, de, e, ef, f,
fg, g)



Príklad



T_{16} = (*h, ha, a, ab, b,*
bi, i, ih, h, hl, l,
lf, f, fk, k, kd, d,
dc, c, cb, b, bj, j,
jd, d, de, e, ef, f,
fg, g, gh, h)

Dôkaz korektnosti algoritmu: Nech výsledkom algoritmu je ťah $T_k = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ a nech G_i je graf, ktorý vznikne z G odobratím hrán $e_1, \ldots, e_i$. Zrejme platí $\deg_{G_k}(v_k) = 0$ (inak by bolo možné ťah T_k predĺžiť), teda je $v_k = v_0$. Predpokladajme sporom, že T_k neobsahuje všetky hrany G, teda že $E(G_k) \neq \emptyset$. Definujme množinu

$$W = \{v \in V(G) : \ \deg_{G_k}(v) > 0\}$$

Keďže G je súvislý graf, T_k navštívi W aspoň raz. Nech v_t je posledný vrchol ťahu T_k, ktorý je z W; t.j. t je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré $v_t \in W$. Potom $v_{t+1} \notin W$. Keďže e_{t+1} je posledná hrana ťahu T_k zasahujúca do W a G_k má hrany len na množine W, tak e_{t+1} je jediná hrana grafu G_t spájajúca vrchol z W s vrcholom mimo W, t.j. e_{t+1} je most v G_t

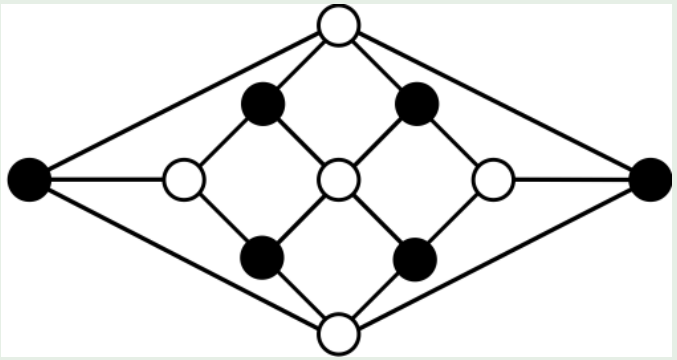
Nech $e \neq e_{t+1}$ je nejaká hrana G_t incidentná s v_t (keďže $\deg_{G_{t+1}}(v_t) \geq \deg_{G_k}(v_t) > 0$, taká hrana existuje). Vzhľadom na pravidlo výberu hrán pri predlžovaní ťahu e musí byť most v G_t (inak by bola vybratá miesto e_{t+1}); navyše platí, že e je mostom v podgrafe G' grafu G_k, ktorý je indukovaný vrcholmi W. Pritom sa však podgraf indukovaný W odoberaním ďalších hrán ťahu T_k už nezmení. Teda stupne vrcholov G_k aj G' sú párne, čo je spor s predošlou lemou.

Hamiltonovské grafy

Definícia

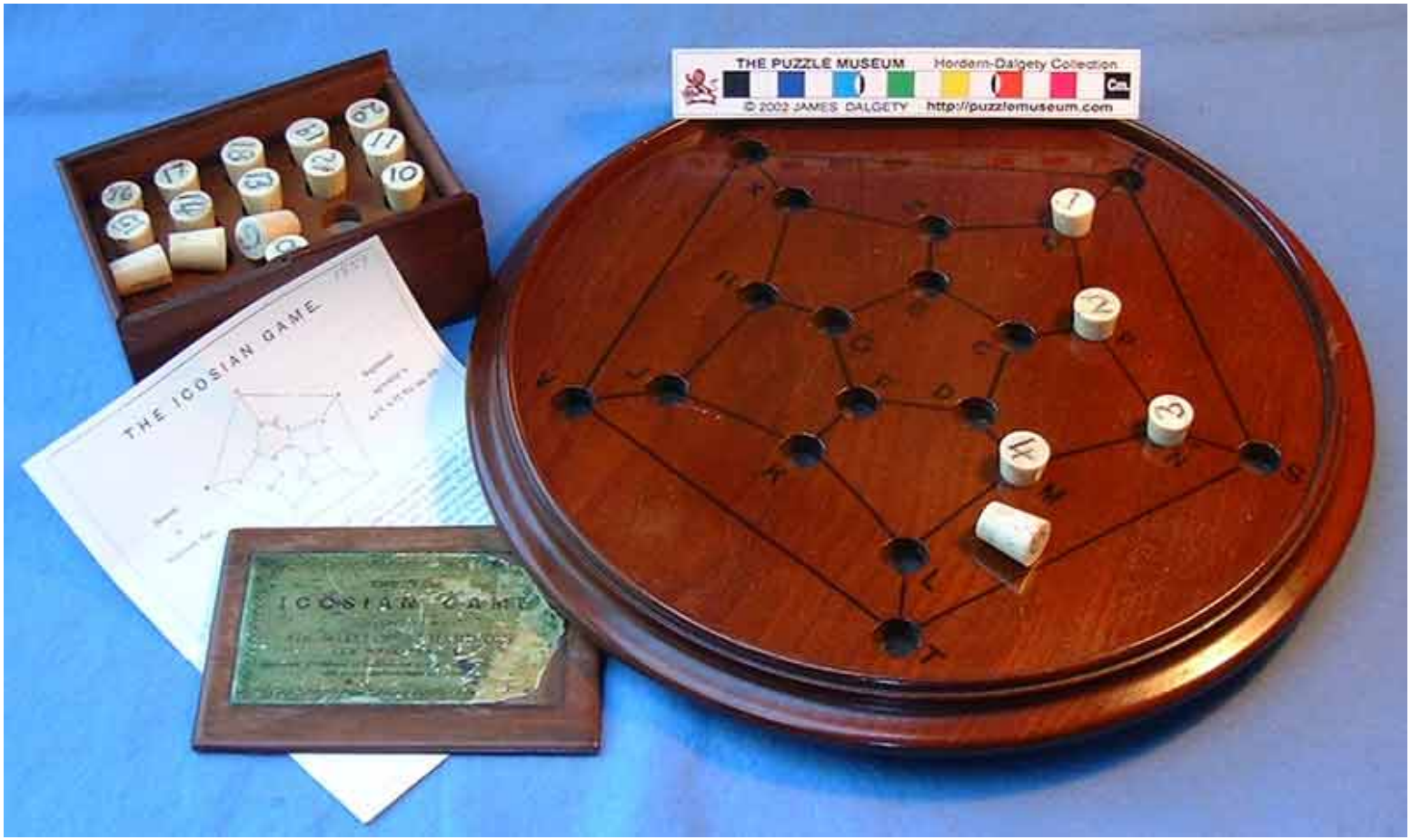
Cesta (resp. kružnica) v grafe sa nazýva hamiltonovská, *ak obsahuje všetky vrcholy grafu. Graf sa nazýva* hamiltonovský, *ak obsahuje hamiltonovskú kružnicu.*

Príklad



Daný graf je bipartitný a nie je hamiltonovský, pretože na hamiltonovskej kružnici by sa museli striedať čierne a biele vrcholy, čo nie je možné (nie je ich rovnako veľa).

História - hra "cesta okolo sveta" (sir W.R. Hamilton, 1857)

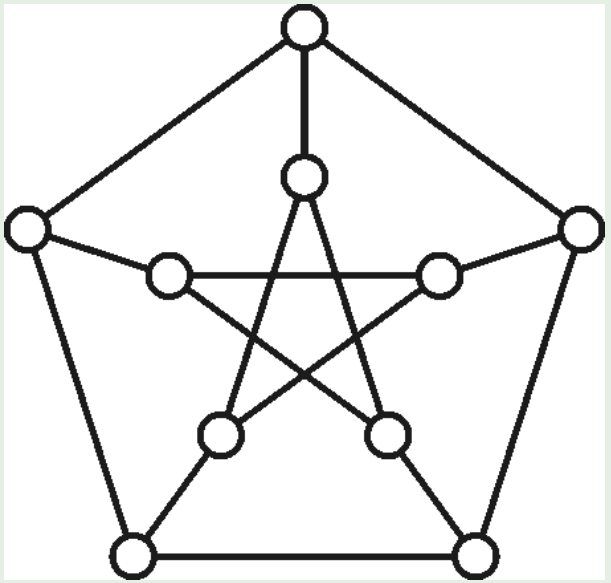


http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm

Svet predstavuje graf pravidelného dvanásťstena (vrcholy sú významné hlavné mestá); úlohou je vyjsť z niektorého mesta, prejsť každým mestom práve raz a vrátiť sa späť na začiatok.

Príklad

Petersenov graf:



Ak by tento graf bol hamiltonovský, tak hamiltonovská kružnica musí prechádzať niektorými dvomi z piatoch hrán, ktoré spájajú vrcholy vonkajšej a vnútornej kružnice dĺžky 5; vzhľadom na symetriu grafu existujú dve možnosti, z ktorých každá však vedie k sporu.

Veta

Nech $G = (V, E)$ je hamiltonovský a $S \subseteq V, S \neq \emptyset$. Potom $c(G - S) \leq |S|$, kde $c(G - S)$ je počet komponentov grafu $G - S$.

Dôkaz: Nech C je hamiltonovská kružnica v G. Potom platí $c(C - S) \leq |S|$. Keďže C je faktorovým podgrafom G, tak $c(G - S) \leq c(C - S)$, teda $c(G - S) \leq |S|$.

Veta (Dirac)

Nech G je súvislý n-vrcholový graf s $n \geq 3$ taký, že $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Potom G je hamiltonovský.

Dôkaz: Sporom - nech existuje súvislý n-vrcholový graf $G = (V, E)$ s $n \geq 3$ a $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, ktorý nie je hamiltonovský. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že G je maximálny graf s touto vlastnosťou, t.j. pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy $u, v \in V$ nech graf $G + uv$ je už hamiltonovský. Potom G obsahuje hamiltonovskú cestu $P = (v_1, \ldots, v_n)$. Definujme $S = \{v_i \in V : \ v_1 v_{i+1} \in E\}, T = \{v_j \in V : \ v_j v_n \in E\}$. Platí:

- $|S| = \deg(v_1) \geq \frac{n}{2}, |T| = \deg(v_n) \geq \frac{n}{2}$
- $S \cap T = \emptyset$: ak by existoval vrchol $v_k \in S \cap T$, tak $(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1}, v_1)$ je hamiltonovská kružnica v G, čo je spor
- $|S \cup T| < n$: vrchol v_n nepatrí ani S, ani T

Potom $n > |S \cup T| = |S| + |T| \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$, čo je spor.

Veta (Ore)

Nech G je súvislý n-vrcholový graf s $n \geq 3$ taký, že pre každé dva nesusedné vrcholy $u, v \in V(G)$ platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Potom G je hamiltonovský.