Rekurentné rovnice

Definícia

Nech $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *je funkcia* k *premenných. Potom rovnica* $x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ *je* rekurentná rovnica rádu k.

Definícia

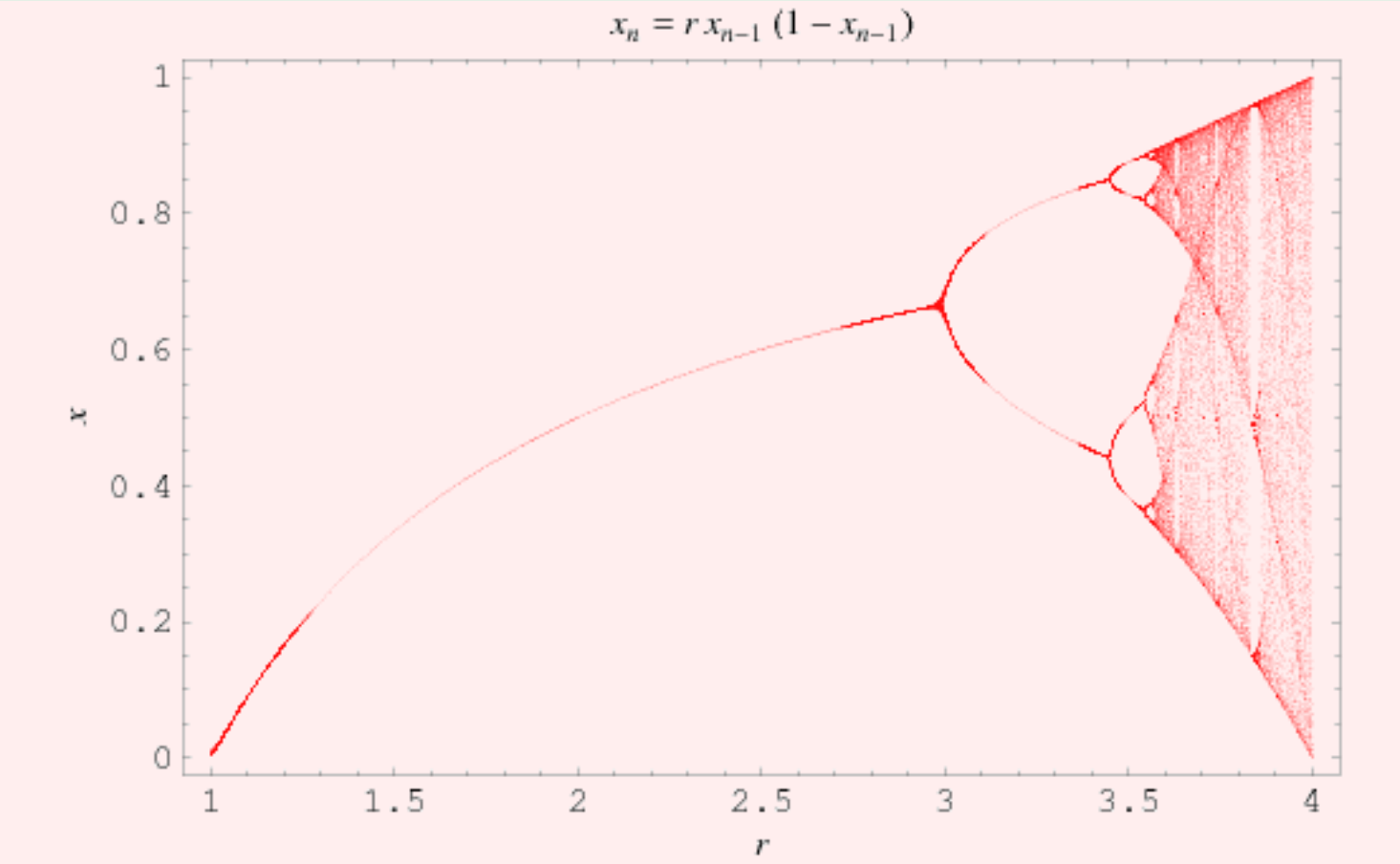
Nech je daná rekurentná rovnica $x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ *rádu* k. *Rovnice* $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots, x_{k-1} = a_{k-1}$ *nazývame* počiatočné podmienky.

Definícia

Explicitné vyjadrenie riešení *rekurentnej rovnice* $x_n = f(x_{n-1}, \ldots, x_{n-k})$ *je rovnica* $x_n = g(n)$, *kde* $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *je funkcia jednej premennej.*

Príklad

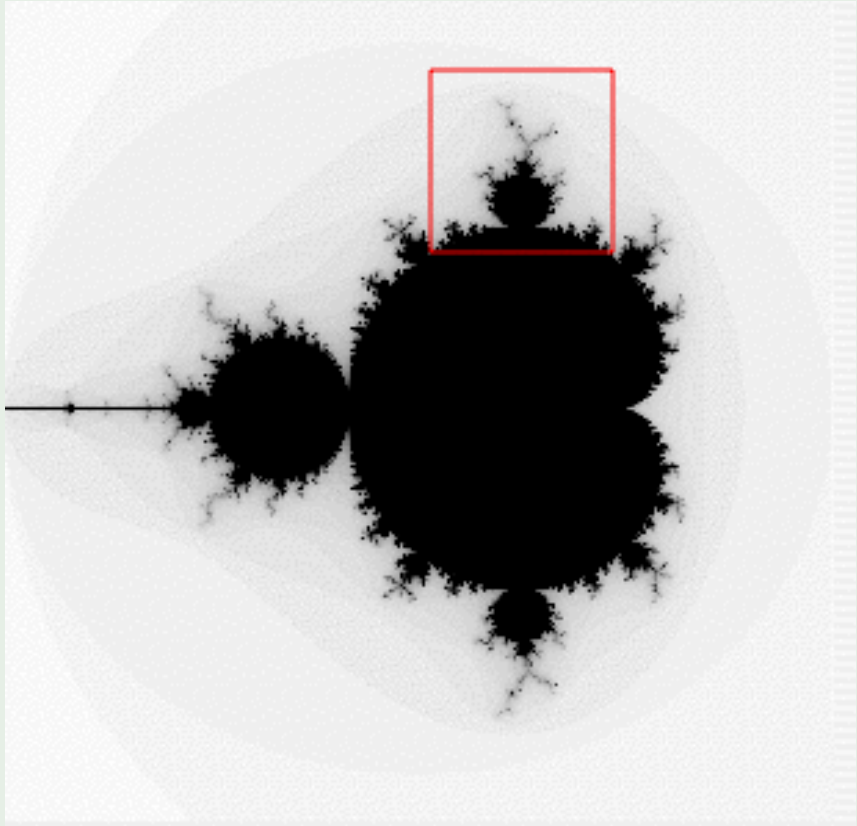
$x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})$ je rekurentná rovnica prvého rádu (tzv. logistická rovnica)



Aplikácie: generátory náhodných čísel, populačná dynamika, teória chaosu

Príklad

$x_n = x_{n-1}^2 + c$ je rekurentná rovnica prvého rádu, ktorá je základom definície Mandelbrotovej množiny:



Príklad (Leonardo z Pisy, "Liber Abaci")

Pár králikov privádza raz za mesiac na svet dve mláďatá, samca a samičku. Títo novonarodení králici prinášajú ďalšie prírastky už dva mesiace po narodení. Koľko párov králikov budeme mať za rok, ak sme na začiatku mali jeden pár králikov?

Označme f_n počet párov králikov na konci n-tého mesiaca. Potom platí $f_0 = 1, f_1 = 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pre $n \geq 2$. Riešením je teda $f_{12} = 377$.

Postupnosť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ sa nazýva Fibonacciho postupnosť. Čísla F_n spĺňajuce $F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre $n \geq 2$ sa nazývajú Fibonacciho čísla.

Definícia

Lineárna rekurentná rovnica rádu k s konštantnými koeficientami *je rekurentná rovnica tvaru*
$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Definícia

Charakteristická rovnica *lineárnej rekurentnej rovnice*
$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$ *rádu* k *s konštantnými koeficientami je rovnica* $x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$.

Veta

Nech $x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2}, n \geq 2$ *je lineárna rekurentná rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami s počiatočnými podmienkami* $x_0 = a_0, x_1 = a_1$ *a nech* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *sú korene jej charakteristickej rovnice.*

1. *Ak* $\alpha \neq \beta$, *tak pre* $n \geq 2$ *je* $x_n = k_1\alpha^n + k_2\beta^n$, *kde* $k_1 = \dfrac{a_1 - a_0\beta}{\alpha - \beta}$, $k_2 = \dfrac{a_0\alpha - a_1}{\alpha - \beta}$ *sú riešenia sústavy*
$$\begin{aligned} a_0 &= k_1 + k_2 \\ a_1 &= k_1\alpha + k_2\beta \end{aligned}$$
2. *Ak* $\alpha = \beta \neq 0$, *tak pre* $n \geq 2$ *je* $x_n = (k_1 + nk_2)\alpha^n$, *kde* $k_1 = a_0, k_2 = \dfrac{a_1 - a_0\alpha}{\alpha}$ *sú riešenia sústavy*
$$\begin{aligned} a_0 &= k_1 \\ a_1 &= (k_1 + k_2)\alpha \end{aligned}$$

Pre $\alpha = 0$ *je* $x_n = 0$ *pre* $n \geq 2$.

Dôkaz: 1. časť tvrdenia: úplnou matematickou indukciou podľa n.

1° : Nech $n = 2$. Poznamenajme, že platí $\alpha^2 = A\alpha + B$, $\beta^2 = A\beta + B$. Potom $x_2 = Ax_1 + Bx_0 = Aa_1 + Ba_0$; na druhej strane, $k_1\alpha^2 + k_2\beta^2 = \frac{a_1 - a_0\beta}{\alpha - \beta}\alpha^2 + \frac{a_0\alpha - a_1}{\alpha - \beta}\beta^2 =$
$\frac{a_1 - a_0\beta}{\alpha - \beta}(A\alpha + B) + \frac{a_0\alpha - a_1}{\alpha - \beta}(A\beta + B) = \frac{1}{\alpha - \beta}(Aa_1\alpha -$
$Aa_0\alpha\beta + Ba_1 - Ba_0\beta + Aa_0\alpha\beta - Aa_1\beta + Ba_0\alpha - Ba_1) =$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(Aa_1\alpha - Ba_0\beta - Aa_1\beta + Ba_0\alpha) =$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha(Aa_1 + Ba_0) - \beta(Aa_1 + Ba_0)) = Aa_1 + Ba_0 = x_2.$

2° : Nech tvrdenie platí pre všetky k menšie ako n, t.j. nech $x_k = k_1\alpha^k + k_2\beta^k$. Potom
$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} = A(k_1\alpha^{n-1} + k_2\beta^{n-1}) + B(k_1\alpha^{n-2} + k_2\beta^{n-2}) = k_1\alpha^{n-2}(A\alpha + B) + k_2\beta^{n-2}(A\beta + B) = k_1\alpha^{n-2} \cdot \alpha^2 + k_2\beta^{n-2} \cdot \beta^2 = k_1\alpha^n + k_2\beta^n$.

Dôkaz: 2. časť tvrdenia: úplnou matematickou indukciou podľa n.

1° : Nech $n = 2$ a $\alpha \neq 0$. Poznamenajme, že platí $\alpha^2 = A\alpha + B$, $\alpha = \frac{A}{2}, \alpha^2 = -B$. Potom $x_2 = Ax_1 + Bx_0 = Aa_1 + Ba_0$; na druhej strane,
$(k_1 + 2k_2)\alpha^2 = \left(a_0 + 2\frac{a_1 - a_0\alpha}{\alpha}\right)\alpha^2 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha - 2a_0\alpha^2 = 2a_1\alpha - a_0\alpha^2 = Aa_1 - (-B)a_0 = Aa_1 + Ba_0$.

2° : Nech tvrdenie platí pre všetky k menšie ako n, t.j. nech $x_k = (k_1 + k \cdot k_2)\alpha^k$. Potom
$x_n = Ax_{n-1} + Bx_{n-2} = A(k_1 + (n-1)k_2)\alpha^{n-1} + B(k_1 + (n-2)k_2)\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2}(A\alpha(k_1 + (n-1)k_2) + B(k_1 + (n-2)k_2)) = \alpha^{n-2}(k_1(A\alpha + B) + k_2(A\alpha(n-1) + B(n-2))) = \alpha^{n-2}(k_1 \cdot \alpha^2 + k_2(n(A\alpha + B) - A\alpha - 2B)) = \alpha^{n-2}(k_1 \cdot \alpha^2 + k_2(n\alpha^2 - 2\alpha \cdot \alpha + 2\alpha^2)) = \alpha^{n-2}(k_1 \cdot \alpha^2 + k_2(n\alpha^2)) = (k_1 + nk_2)\alpha^n$.

Príklad

Odvoďte explicitné vyjadrenie n-tého člena Fibonacciho postupnosti.

Charakteristická rovnica pre rekurentnú rovnicu Fibonacciho postupnosti je $x^2 = x + 1$; jej korene sú $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ďalej je

$$k_1 = \frac{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$k_2 = 1 - k_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Teda

$$x_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$