Základy kombinatorického počítania

Predmetom kombinatoriky je skúmanie rozličných usporiadaní objektov; tieto objekty sa nazývajú *konfigurácie*.

Základné typy kombinatorických úloh sú:

- zostrojenie konfigurácií s určitými vlastnosťami
- dôkaz existencie/neexistencie určitej konfigurácie bez jej skonštruovania
- charakterizácia existujúcich konfigurácií pomocou iných pojmov a vlastností
- určenie počtu všetkých konfigurácií s danými vlastnosťami
- určenie algoritmu na zostrojenie všetkých konfigurácií
- výber konfigurácií, ktoré sú optimálne vzhľadom na zvolené kritériá

Množina, z prvkov ktorej sú utvárané konfigurácie, sa nazýva *základná (bázová) množina*.

Príklad

Základom mnohých cestovných lístkov v MHD rôznych miest je štvorec 3×3, ktorého jednotlivé polia sú očíslované postupne $1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9$. Označený lístok má štyri polia perforované. Koľko existuje rôznych označených lístkov?

Základná množina je tu množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, konfigurácie sú jej štvorprvkové podmnožiny.

Príklad

Koľko je všetkých možných rozostavení čiernych a bielych pešiakov v hre "preskakovaná" na šachovnici 8×8? (pešiaci oboch farieb obsadzujú len čierne polia šachovnice, pričom každé čierne pole je obsadené najviac jedným pešiakom)

Základná množina je tu množina $X = \{1, \ldots, 32\}$ (každému čiernemu poľu šachovnice priradíme "poradové číslo"). Konfigurácie sú usporiadané dvojice (B, C), kde B, C sú navzájom disjunktné 8-prvkové podmnožiny X.

Príklad (http://en.wikipedia.org/wiki/Password_strength)

Heslo typu Environ má nasledujúcu štruktúru:

spoluhláska - samohláska - spoluhláska - spoluhláska - samohláska - spoluhláska - číslo - číslo

Koľko hesiel typu Environ možno utvoriť z malých písmen anglickej abecedy a desiatich cifier?

Základná množina je tu množina
$X = \{a, b, \ldots, z\} \cup \{0, 1, \ldots 9\} = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, kde
$X_1 = \{a, e, i, o, u, y\}, X_2 = \{b, c, \ldots, z\}, X_3 = \{0, 1, \ldots, 9\}$.
Konfigurácie sú usporiadané osmice z karteziánskeho súčinu
$X_2 \times X_1 \times X_2 \times X_2 \times X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_3$.

Najobvyklejším typom kombinatorickej úlohy je určiť počet všetkých konfigurácií s určitými vlastnosťami. K tomu je potrebné urobiť matematizáciu problému - popísať konfigurácie pomocou typických matematických objektov (podmnožiny, usporiadané k-tice a i.) a správne určiť ich počet. Najčastejší zdroj omylov tkvie v tom, že sa nevymenujú všetky konfigurácie, alebo že sa niektorá konfigurácia započíta viackrát.

Veta (pravidlo súčtu)

Nech $Y_1, \ldots, Y_n, n \geq 2$ sú navzájom disjunktné podmnožiny konečnej množiny Y také, že $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$. Potom $|Y| = \sum_{i=1}^{n} |Y_i|$.

Dôkaz: matematickou indukciou podľa n.

1° : Nech $n = 2$. Nech $Y_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}, Y_2 = \{b_1, \ldots b_s\}$.

Podľa predpokladov je $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, teda $Y = Y_1 \cup Y_2 = \{c_1, \ldots, c_{r+s}\}$, kde pre všetky $i = 1, \ldots, r$ je $c_i = a_i$ a pre všetky $j = 1, \ldots, s$ je $c_{r+j} = b_j$. Teda $|Y| = r + s = |Y_1| + |Y_2|$.

2° : Nech tvrdenie platí pre $n = k$, t.j. nech
$|Y_1 \cup \cdots \cup Y_k| = \sum_{i=1}^{k} |Y_i|$ pre množiny $Y_1, \ldots, Y_k$ také, že
$Y_i \cap Y_j = \emptyset$ pre $i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j$.
Pre $n = k + 1$ je $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k+1} = (Y_1 \cup \cdots \cup Y_k) \cup Y_{k+1}$; keďže pre $i \in \{1, \ldots, k\}$ je $Y_{k+1} \cap Y_i = \emptyset$, tak $Y_{k+1} \cap (Y_1 \cup \cdots \cup Y_k) = \emptyset$.
Využijúc prvú časť dôkazu, máme
$|Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k+1}| = |Y_1 \cup \ldots Y_k| + |Y_{k+1}| \overset{i.p.}{=} |Y_1| + \cdots + |Y_k| + |Y_{k+1}|$.

Príklad

Koľkokrát za deň tvoria cifry na displeji 6-miestnych digitálnych hodín rastúcu postupnosť?

Konfigurácie sú tu usporiadané šestice $[x_1, \ldots, x_6]$, kde x_1x_2 je dvojčíslie hodín $(00 \ldots 23)$, x_3x_4 dvojčíslie minút a x_5x_6 dvojčíslie sekúnd $(00 \ldots 59)$. Ak postupnosť má byť rastúca, tak nutne musí byť $x_5 \in \{4, 5\}$.
V prípade $x_5 = 4$ je päť možností pre konfigurácie $(01:23:45 - 01:23:49)$, v druhom prípade $5 \cdot 4 = 20$ možností (5 pre štvoricu $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ a nezávisle od toho 4 pre voľbu x_6); spolu je teda **25** možností.

Veta (pravidlo súčinu)

Nech $Y_1, \ldots, Y_n, n \geq 2$ *sú konečné množiny. Potom* $|Y_1 \times \cdots \times Y_n| = \prod_{i=1}^{n} |Y_i|$.

Dôkaz: matematickou indukciou podľa n.

1° : Nech $n = 2$. Nech $Y_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}, Y_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$ a $Y = Y_1 \times Y_2$.
Uvažujme množiny $Y^{(i)} = \{[x, y] \in Y : \ x = a_i\}$. Pre $i \neq j$ je $Y^{(i)} \neq Y^{(j)}$ a platí $\bigcup_{i=1}^{r} Y^{(i)} = Y$. Ďalej, pre všetky $i = 1, \ldots, r$ platí $|Y^{(i)}| = s$. Podľa pravidla súčtu potom dostávame $|Y| = \sum_{i=1}^{r} |Y^{(i)}| = r \cdot s = |Y_1| \cdot |Y_2|$.

2° : nech tvrdenie platí pre $n = k$ a nech $Y_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Pre $n = k+1$ je $Y_1 \times \cdots \times Y_{k+1} = Y_1 \times (Y_2 \times \cdots \times Y_k)$. Uvažujme množiny $J^{(i)} = \{[x, y] \in Y_1 \times (Y_2 \times \cdots \times Y_{k+1}) : \ x = a_i\}$.Pre $i \neq j$ je $J^{(i)} \neq J^{(j)}$ a platí $Y_1 \times \cdots \times Y_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{r} J^{(i)}$. Ďalej, pre všetky $i = 1, \ldots, r$ platí $|J^{(i)}| = |Y_2 \times \cdots \times Y_{k+1}|$.Podľa pravidla súčtu potom dostávame $|Y_1 \times \cdots \times Y_{k+1}| = \sum_{i=1}^{r} |J^{(i)}| = r|J^{(i)}| = r|Y_2 \times \cdots \times Y_{k+1}| \overset{i.p.}{=} r|Y_2| \cdot \cdots \cdot |Y_{k+1}| = |Y_1| \cdot |Y_2| \cdot \ldots |Y_{k+1}|$.

Príklad

Koľko štvorciferných čísel deliteľných 5 možno zostaviť z cifier 0, 2, 4, 5, 8 (cifry sa môžu opakovať) ?

Základná množina je $X = \{0, 2, 4, 5, 8\}$, konfigurácie sú usoriadané štvorice z množiny $Y = (X \setminus \{0\}) \times X \times X \times \{0, 5\}$. Podľa pravidla súčinu je potom $|Y| = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 =$ **200**.

Veta (zovšeobecnené pravidlo súčinu)

Nech X je konečná množina, $n \geq 2$ a $S = \{[s_1, \ldots, s_n] : \ (\forall i = 1, \ldots, n)\ s_i \in X\} \subseteq X^n$ je množina spĺňajúca nasledujúce podmienky:

1) *prvok s_1 možno z množiny X vybrať n_1 spôsobmi*
2) *po akomkoľvek výbere prvku s_1 je možné prvok s_2 vybrať z X n_2 spôsobmi*

... ...

j) *po akomkoľvek výbere usporiadanej $(j-1)$-tice $[s_1, \ldots, s_{j-1}]$ je možné prvok s_j vybrať n_j spôsobmi*

... ...

Potom $|S| = \prod_{i=1}^{n} n_i$.

Dôkaz: matematickou indukciou podľa n.

1° : Nech $n = 2$. Označme $S_i = \{[s_1, s_2] \subseteq X^2 : \ s_1 = i\}$, kde $i \in I, |I| = n_1$. Podľa definície množiny S je potom pre každé $i \in I$ $|S_i| = n_2$; použitím pravidla súčtu potom máme $|S| = \sum_{i \in I} |S_i| = \sum_{i \in I} n_2 = n_1 \cdot n_2$.

2° : Nech tvrdenie platí pre $n = k$. Uvažujme množinu S definovanú ako v tvrdení pre $n = k + 1$ a označme $S_i = \{[s_1, \ldots, s_{k+1}] \subseteq X^{k+1} : \ s_1 = i\}$ pre $i \in I, |I| = n_1$. Potom pre každé $i \in I$ je $|S_i| = |\{[s_2, \ldots, s_{k+1}] \subseteq X^k :$ výbery $s_2, \ldots, s_{k+1}$ spĺňajú podmienky vety$\}| \overset{i.p.}{=} n_2 \cdot \cdots \cdot n_{k+1}$. Použitím pravidla súčtu potom dostávame $|S| = \sum_{i \in I} |S_i| = \sum_{i \in I} n_2 \cdot \cdots \cdot n_{k+1} = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_{k+1}$.

Príklad

Koľko je päťciferných čísel, ktorých cifry sú navzájom rôzne?

Cifru najvyššieho rádu možno vybrať z 9 cifier (všetky okrem nuly), cifru druhého najvyššieho rádu z 9 cifier (vyberáme z 10 cifier, ale musí byť rôzna od prvej vybratej), cifru tretieho najvyššieho rádu z 8 cifier (musí byť rôzna od prvých dvoch) atď. Počet daných päťciferných čísel je potom $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$ **27216**.