Sledy, ťahy, cesty, kružnice

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf. Postupnosť* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* $v_0 - v_k$-sled *v* G*, ak pre každé* $i = 0, \ldots, k$ *je* $v_i \in V$ *a pre každé* $j = 1, \ldots, k$ *je* $e_j = v_{j-1}v_j \in E$*. Číslo* k *sa nazýva* dĺžka sledu*. Sled sa nazýva* uzavretý*, ak* $v_0 = v_k$*, inak sa nazýva* otvorený*.*

Sledy, ťahy, cesty, kružnice

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf. Postupnosť* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* $v_0 - v_k$-sled *v* G*, ak pre každé* $i = 0, \ldots, k$ *je* $v_i \in V$ *a pre každé* $j = 1, \ldots, k$ *je* $e_j = v_{j-1}v_j \in E$*. Číslo* k *sa nazýva* dĺžka sledu*. Sled sa nazýva* uzavretý*, ak* $v_0 = v_k$*, inak sa nazýva* otvorený*.*

Definícia

Sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* ťah*, ak pre každé* $i, j = 1, \ldots, k$ *je* $e_i \neq e_j$*.*

Sledy, ťahy, cesty, kružnice

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf. Postupnosť* $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* $v_0 - v_k$-sled *v* G*, ak pre každé* $i = 0, \ldots, k$ *je* $v_i \in V$ *a pre každé* $j = 1, \ldots, k$ *je* $e_j = v_{j-1}v_j \in E$*. Číslo* k *sa nazýva* dĺžka sledu*. Sled sa nazýva* uzavretý*, ak* $v_0 = v_k$*, inak sa nazýva* otvorený*.*

Definícia

Sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* ťah*, ak pre každé* $i, j = 1, \ldots, k$ *je* $e_i \neq e_j$*.*

Definícia

Sled $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ *sa nazýva* cesta*, ak pre každé* $i, j = 0, \ldots, k, i \neq j$ *je* $v_i \neq v_j$*.*

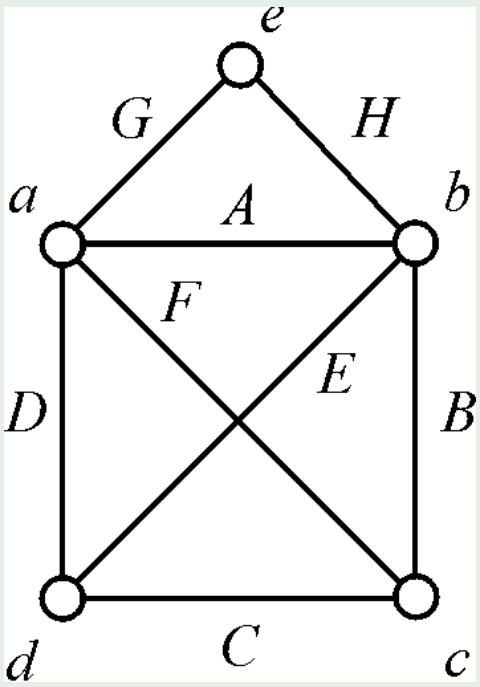
Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$*, v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

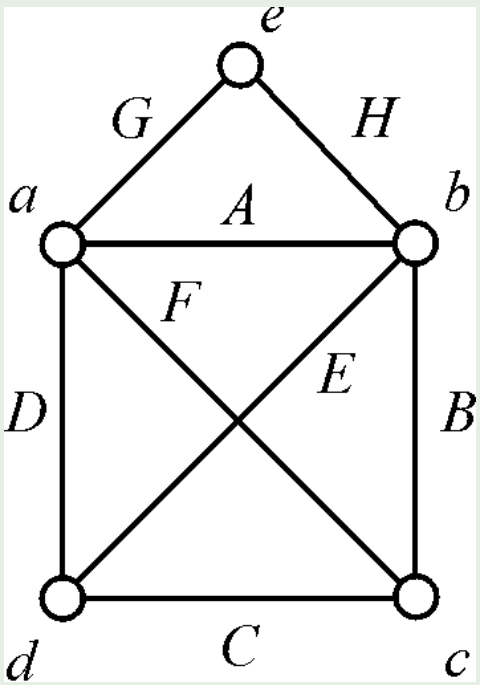
Príklad



Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Príklad

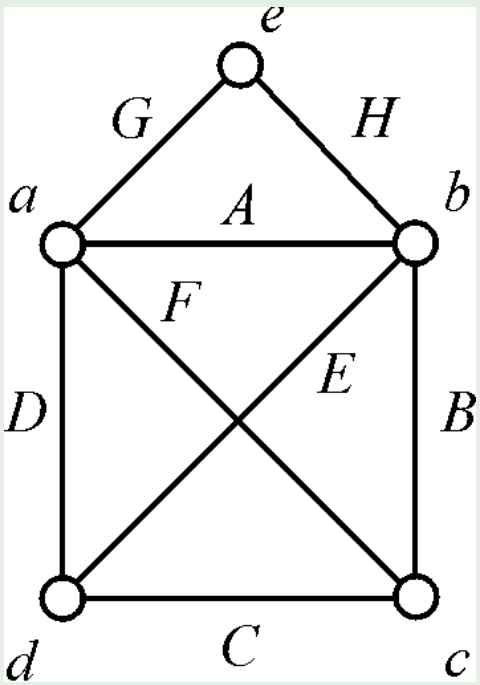


$(a, A, b, B, c, F, d, D, a)$ nie je sled

Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Príklad



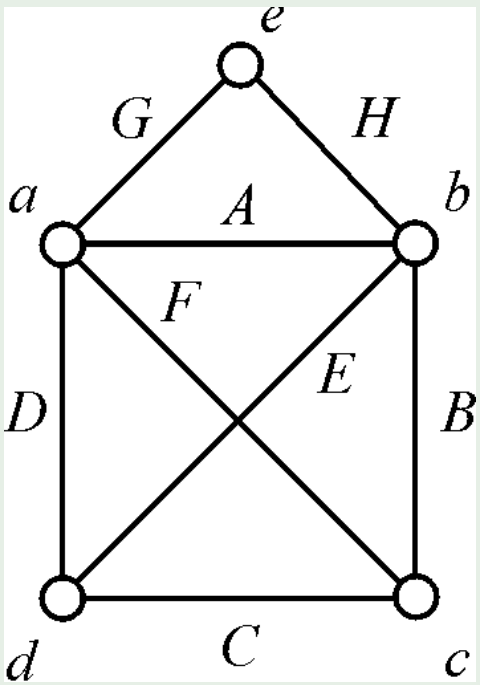
$(a, A, b, B, c, F, d, D, a)$ nie je sled

$(a, A, b, B, c, C, d, C, c, F, d, D, a)$ je sled, ale nie je ťah

Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Príklad



$(a, A, b, B, c, F, d, D, a)$ nie je sled

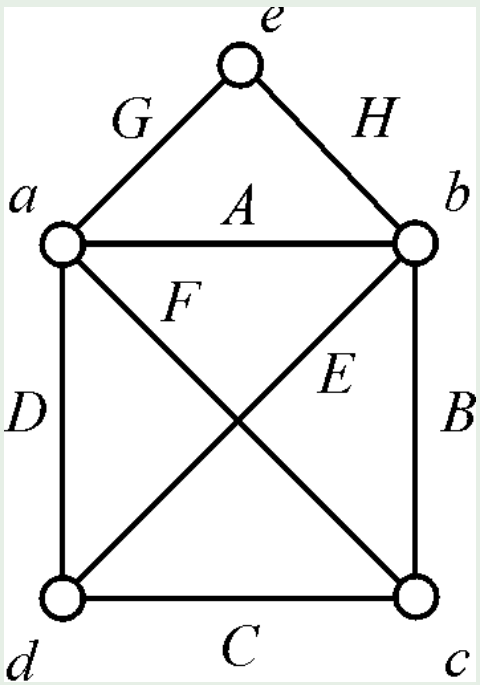
$(a, A, b, B, c, C, d, C, c, F, d, D, a)$ je sled, ale nie je ťah

$(a, A, b, B, c, C, d, E, b, H, e)$ je ťah, ale nie je cesta

Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Príklad



$(a, A, b, B, c, F, d, D, a)$ nie je sled

$(a, A, b, B, c, C, d, C, c, F, d, D, a)$ je sled, ale nie je ťah

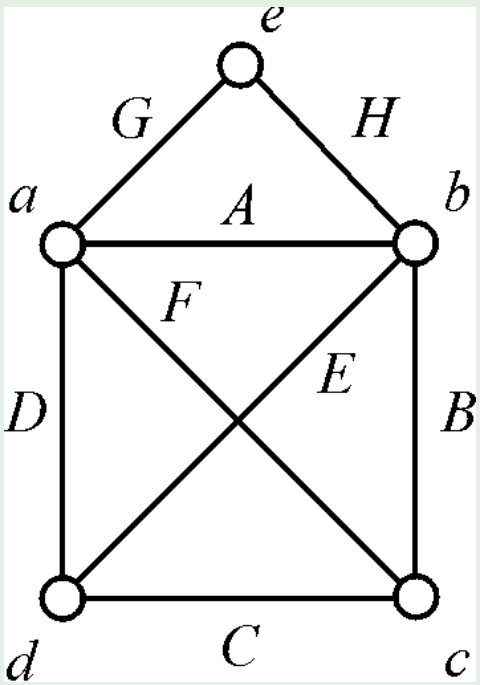
$(a, A, b, B, c, C, d, E, b, H, e)$ je ťah, ale nie je cesta

(a, A, b, B, c, C, d) je cesta

Definícia

Uzavretý ťah $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, *v ktorom* $v_i \neq v_j$ *pre každé* $i, j = 1, \ldots, k-1, i \neq j$ *sa nazýva* kružnica.

Príklad



$(a, A, b, B, c, F, d, D, a)$ nie je sled

$(a, A, b, B, c, C, d, C, c, F, d, D, a)$ je sled, ale nie je ťah

$(a, A, b, B, c, C, d, E, b, H, e)$ je ťah, ale nie je cesta

(a, A, b, B, c, C, d) je cesta

$(a, A, b, B, c, C, d, D, a)$ je kružnica

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf. Vrcholy* $u, v \in V$ súvisia, *ak existuje* $u - v$*-sled v* G*. Graf sa nazýva* súvislý, *ak ľubovoľné dva vrcholy* G *súvisia.*

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ súvisia, *ak existuje $u - v$-sled v G. Graf sa nazýva* súvislý, *ak ľubovoľné dva vrcholy G súvisia.*

Lema

Relácia súvislosti vrcholov v grafe je reláciou ekvivalencie.

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ súvisia, *ak existuje $u - v$-sled v G. Graf sa nazýva* súvislý, *ak ľubovoľné dva vrcholy G súvisia.*

Lema

Relácia súvislosti vrcholov v grafe je reláciou ekvivalencie.

Dôkaz: Relácia súvislosti vrcholov je

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ súvisia, *ak existuje $u - v$-sled v G. Graf sa nazýva* súvislý, *ak ľubovoľné dva vrcholy G súvisia.*

Lema

Relácia súvislosti vrcholov v grafe je reláciou ekvivalencie.

Dôkaz: Relácia súvislosti vrcholov je

- reflexívna: každý vrchol súvisí sám so sebou (keďže v je $v - v$-sled dĺžky 0)

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ súvisia, *ak existuje $u - v$-sled v G. Graf sa nazýva* súvislý, *ak ľubovoľné dva vrcholy G súvisia.*

Lema

Relácia súvislosti vrcholov v grafe je reláciou ekvivalencie.

Dôkaz: Relácia súvislosti vrcholov je

- reflexívna: každý vrchol súvisí sám so sebou (keďže v je $v - v$-sled dĺžky 0)
- symetrická: ak vrchol u súvisí s v, tak existuje $u - v$-sled $(u = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$; potom $(v_k, e_k, v_{k-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0)$ je $v - u$-sled, teda v súvisí s u

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf. Vrcholy $u, v \in V$ súvisia, ak existuje $u - v$-sled v G. Graf sa nazýva súvislý, ak ľubovoľné dva vrcholy G súvisia.

Lema

Relácia súvislosti vrcholov v grafe je reláciou ekvivalencie.

Dôkaz: Relácia súvislosti vrcholov je

- reflexívna: každý vrchol súvisí sám so sebou (keďže v je $v - v$-sled dĺžky 0)
- symetrická: ak vrchol u súvisí s v, tak existuje $u - v$-sled $(u = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$; potom $(v_k, e_k, v_{k-1}, \ldots, v_1, e_1, v_0)$ je $v - u$-sled, teda v súvisí s u
- tranzitívna: ak u súvisí s v a v súvisí s w, tak existuje $u - v$-sled $(u = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k = v)$ a $v - w$-sled $(v = w_0, f_1, w_1, \ldots, w_{l-1}, f_l, w_l = w)$; potom $(u = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k, f_1, w_1, \ldots, w_{l-1}, f_l, w_l)$ (zreťazenie uvedených sledov) je $u - w$-sled, teda u súvisí s w.

Vzhľadom na reláciu súvislosti vrcholov v grafe $G = (V, E)$ potom dostávame rozklad množiny V na disjunktné podmnožiny $V_1, \ldots, V_k$ také, že pre všetky $i = 1, \ldots, k$ sú indukované grafy $G[V_i]$ súvislé a pre $i, j = 1, \ldots, k, i \neq j$ žiaden vrchol $u \in V_i$ nesúvisí so žiadnym vrcholom $v \in V_j$. Grafy $G[V_i]$ sa nazývajú *komponenty súvislosti* grafu G.

Určovanie súvislosti vrcholov, hľadanie komponentov

Algoritmus na nájdenie komponentov súvislosti

VSTUP: graf $G = (V, E)$
VÝSTUP: pole $komp$
pre každý $(x \in V)$ $komp[x] := 0$
$i := 0$
pre každé $(v \in V)$ opakuj
    ak $(komp[v] = 0)$ tak
        $i := i + 1$
        /* BFS pre vrchol v*/
        $v \rightarrow$ RAD
        $komp[v] := i$
        pokiaľ (RAD $\neq \emptyset$) opakuj
            RAD $\rightarrow u$
            pre každý (x susedný s u) opakuj
                ak $(komp[x] = 0)$ tak
                $komp[x] := komp[u]$
                $x \rightarrow$ RAD

Po skončení algoritmu $komp[x]$ udáva poradové číslo komponentu súvislosti G,ktorý obsahuje vrchol x.

Veta

Nech $G = (V, E)$ *je graf,* $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ *a* A *je matica susednosti* G*. Pre* $k \geq 1$ *položme* $A^{(k)} = A^{(k-1)} \cdot A$*. Potom*

1. *prvok* $a_{i,j}^{(k)}$ *matice* $A^{(k)}$ *je rovný počtu* $v_i - v_j$ *sledov dĺžky* k *v* G
2. $a_{i,i}^{(2)} = \deg(v_i)$
3. G *je súvislý práve vtedy, keď pre všetky* $i, j = 1, \ldots, n$ *je* $\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \neq 0.$

Veta

Nech $G = (V, E)$ je graf, $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ a A je matica susednosti G. Pre $k \geq 1$ položme $A^{(k)} = A^{(k-1)} \cdot A$. Potom

1. *prvok $a_{i,j}^{(k)}$ matice $A^{(k)}$ je rovný počtu $v_i - v_j$ sledov dĺžky k v G*
2. $a_{i,i}^{(2)} = \deg(v_i)$
3. *G je súvislý práve vtedy, keď pre všetky $i, j = 1, \ldots, n$ je* $\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \neq 0.$

Dôkaz: 1) matematickou indukciou podľa k.

1° : pre $k = 1$ tvrdenie vyplýva z definície matice A.
2° : Nech tvrdenie platí pre $l = k - 1$. Pre $l = k$ z definície násobenia matíc máme

$$a^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^{(k-1)} \cdot a_{p,j} = \sum_{p=0}^{n} s_p$$

Sčítanec s_p udáva počet $v_i - v_j$ sledov dĺžky k, ktorých posledná hrana je $v_p v_j$. Ak $v_p v_j \notin E$, tak $s_p = 0$. Keďže každý $v_i - v_j$ sled dĺžky aspoň 1 má nejakú poslednú hranu $v_p v_j$, tak $\sum_{p=0}^{n} s_p$ udáva počet všetkých $v_i - v_j$ sledov dĺžky k.

$$a^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^{(k-1)} \cdot a_{p,j} = \sum_{p=0}^{n} s_p$$

Sčítanec s_p udáva počet $v_i - v_j$ sledov dĺžky k, ktorých posledná hrana je $v_p v_j$. Ak $v_p v_j \notin E$, tak $s_p = 0$. Keďže každý $v_i - v_j$ sled dĺžky aspoň 1 má nejakú poslednú hranu $v_p v_j$, tak $\sum_{p=0}^{n} s_p$ udáva počet všetkých $v_i - v_j$ sledov dĺžky k.

2) Podľa 1) je $a^{(2)}$ rovné počtu $v_i - v_j$-sledov dĺžky 2, čo je počet hrán incidentných s v_i.

$$a^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^{(k-1)} \cdot a_{p,j} = \sum_{p=0}^{n} s_p$$

Sčítanec s_p udáva počet $v_i - v_j$ sledov dĺžky k, ktorých posledná hrana je $v_p v_j$. Ak $v_p v_j \notin E$, tak $s_p = 0$. Keďže každý $v_i - v_j$ sled dĺžky aspoň 1 má nejakú poslednú hranu $v_p v_j$, tak $\sum_{p=0}^{n} s_p$ udáva počet všetkých $v_i - v_j$ sledov dĺžky k.

2) Podľa 1) je $a^{(2)}$ rovné počtu $v_i - v_j$-sledov dĺžky 2, čo je počet hrán incidentných s v_i.

3) Ak G je súvislý, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje $v_i - v_j$-sled, a teda aj $v_i - v_j$ cesta dĺžky $d \leq n - 1$.

Potom podľa 1) platí $a_{i,j}^{(d)} \neq 0$, teda $\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \neq 0$.

$$a^{(k)} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^{(k-1)} \cdot a_{p,j} = \sum_{p=0}^{n} s_p$$

Sčítanec s_p udáva počet $v_i - v_j$ sledov dĺžky k, ktorých posledná hrana je $v_p v_j$. Ak $v_p v_j \notin E$, tak $s_p = 0$. Keďže každý $v_i - v_j$ sled dĺžky aspoň 1 má nejakú poslednú hranu $v_p v_j$, tak $\sum_{p=0}^{n} s_p$ udáva počet všetkých $v_i - v_j$ sledov dĺžky k.

2) Podľa 1) je $a^{(2)}$ rovné počtu $v_i - v_j$-sledov dĺžky 2, čo je počet hrán incidentných s v_i.

3) Ak G je súvislý, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $v_i, v_j \in V$ existuje $v_i - v_j$-sled, a teda aj $v_i - v_j$ cesta dĺžky $d \leq n-1$. Potom podľa 1) platí $a_{i,j}^{(d)} \neq 0$, teda $\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \neq 0$. Obrátene, ak $\sum_{k=1}^{n-1} a_{i,j}^{(k)} \neq 0$, tak existuje d také, že $a_{i,j}^{(d)} \neq 0$. To znamená, že existuje aspoň jeden $v_i - v_j$-sled (dĺžky d). To platí pre všetky $i, j = 1, \ldots, n$, teda graf G je súvislý.

Vzdialenosť v grafoch

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je graf a $u, v \in V$. Vzdialenosť $d(u, v)$ *vrcholov u, v je dĺžka najkratšej $u - v$-cesty; ak u, v nesúvisia, tak $d(u, v) := +\infty$.*

Vzdialenosť v grafoch

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf a* $u, v \in V$. Vzdialenosť $d(u, v)$ *vrcholov* u, v *je dĺžka najkratšej* $u - v$*-cesty; ak* u, v *nesúvisia, tak* $d(u, v) := +\infty$.

Definícia

Nech $G = (V, E)$ *je graf,* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Matica vzdialeností *grafu* G *je štvorcová symetrická matica* $D = (d_{i,j})$ *rádu* n *taká, že pre každé* $i, j = 1, \ldots, n$ *je* $d_{i,j} = d(v_i, v_j)$.

Veta

V každom súvislom grafe $G = (V, E)$ *platí:*

1. $(\forall u, v \in V)\ d(u, v) \geq 0$, *pričom* $d(u, v) = 0$ *práve vtedy, keď* $u = v$
2. $(\forall u, v \in V)\ d(u, v) = d(v, u)$
3. $(\forall u, v, w \in V)\ d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Veta

V každom súvislom grafe $G = (V, E)$ platí:

1. $(\forall u, v \in V)\ d(u, v) \geq 0$, *pričom* $d(u, v) = 0$ *práve vtedy, keď* $u = v$
2. $(\forall u, v \in V)\ d(u, v) = d(v, u)$
3. $(\forall u, v, w \in V)\ d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Dôkaz: Prvé dve tvrdenia vyplývajú priamo z definície; k tretiemu tvrdeniu: ak P_1 je nejaká najkratšia $u - v$-cesta dĺžky l_1 a P_2 nejaká najkratšia $v - w$-cesta dĺžky l_2, tak postupnosť $P_1 P_2$ daná ich zreťazením je $u - w$ sled, teda najkratšia $u - w$-cesta má dĺžku najviac $l_1 + l_2$.

Určovanie vzdialeností vrcholov

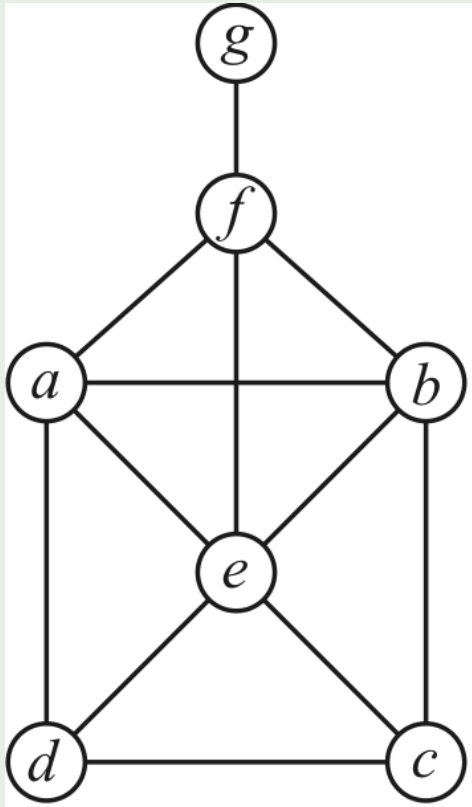
Algoritmus pre vzdialenosti vrcholov od pevne zvoleného vrchola (modifikácia BFS)

VSTUP: graf $G = (V, E)$, vrchol $v \in V$
VÝSTUP: pole $dist$

$v \rightarrow$ RAD
$dist[v] := 0$
pre každý $(x \in V)$ $dist[x] := +\infty$
pokiaľ (RAD $\neq \emptyset$) opakuj
    RAD $\rightarrow u$
    pre každý (x susedný s u) opakuj
        ak ($dist[x] = +\infty$) tak
            $dist[x] := dist[u] + 1$
            $x \rightarrow$ RAD

Po skončení algoritmu $dist[x]$ udáva vzdialenosť vrchola x od vrchola v.

Príklad



RAD

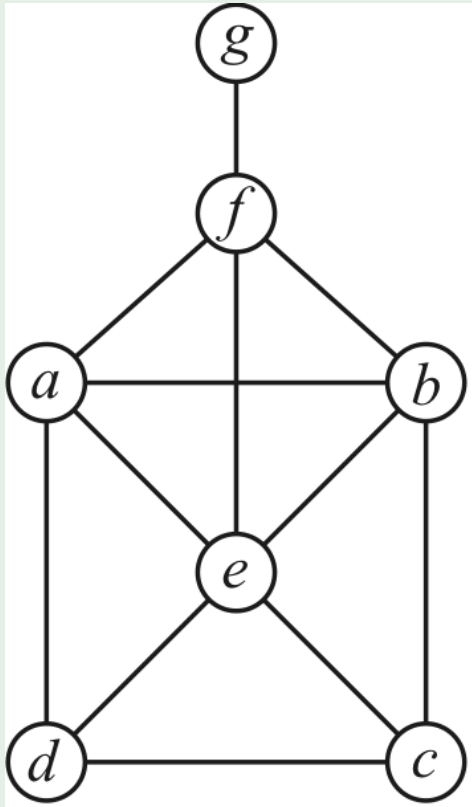
G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

dist

a	b	c	d	e	f	g

Príklad



RAD

g

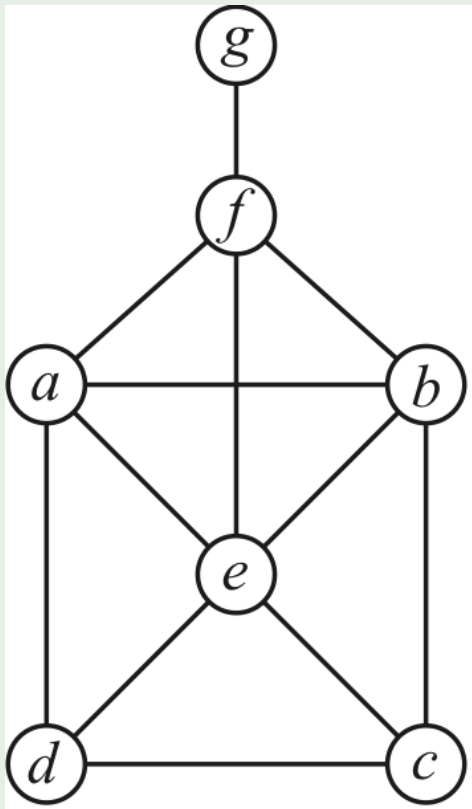
G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, g$
$g : f$

dist

a	b	c	d	e	f	g

Príklad



RAD

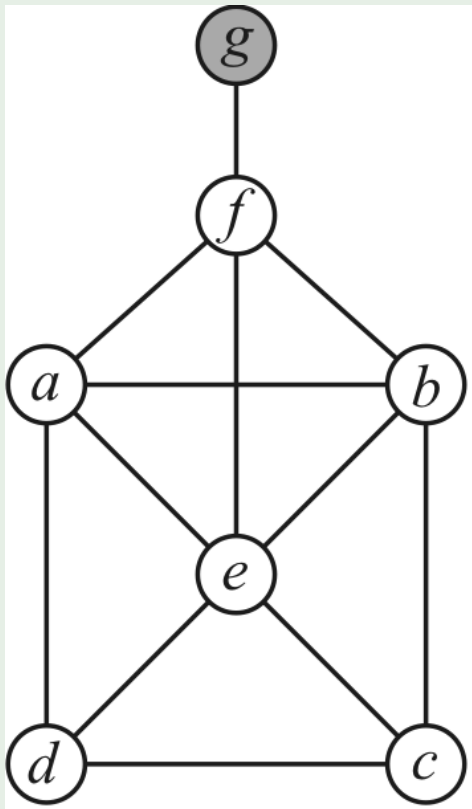
G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, \mathbf{g}$
$\mathbf{g} : f$

dist

a	b	c	d	e	f	g
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Príklad



RAD

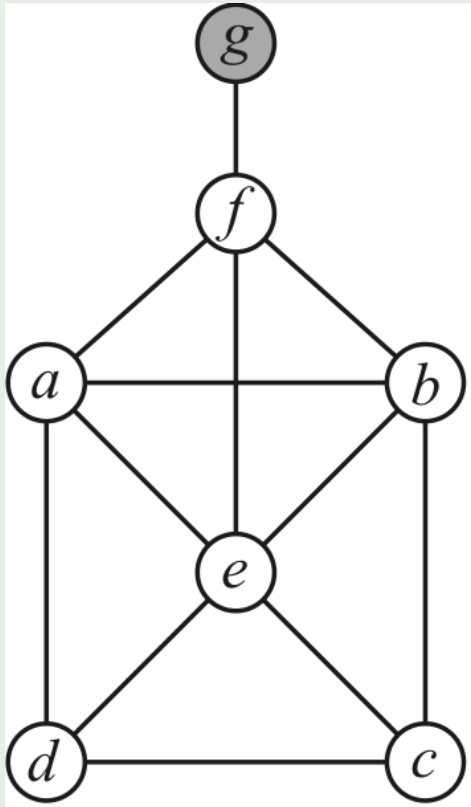
G

$a : b, d, e, f$
$b : a, c, e, f$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, f$
$f : a, b, e, \mathbf{g}$
$\mathbf{g} : f$

dist

a	b	c	d	e	f	g
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Príklad



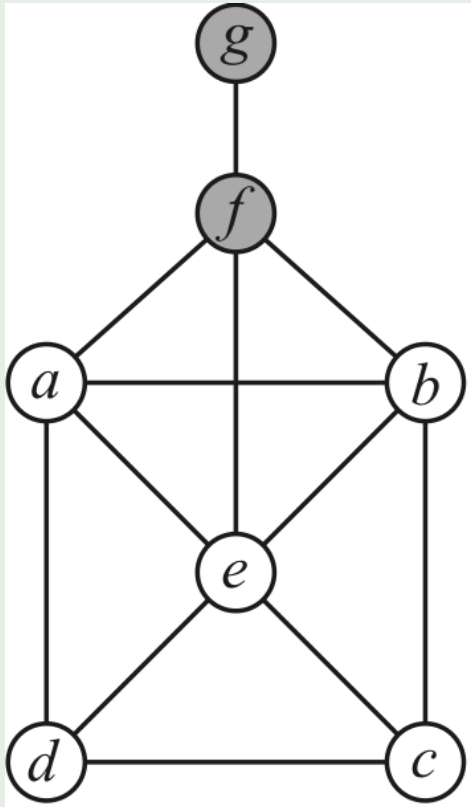
G

$a : b, d, e, \boldsymbol{f}$
$b : a, c, e, \boldsymbol{f}$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : a, b, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

dist

a	b	c	d	e	f	g
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0

Príklad



RAD

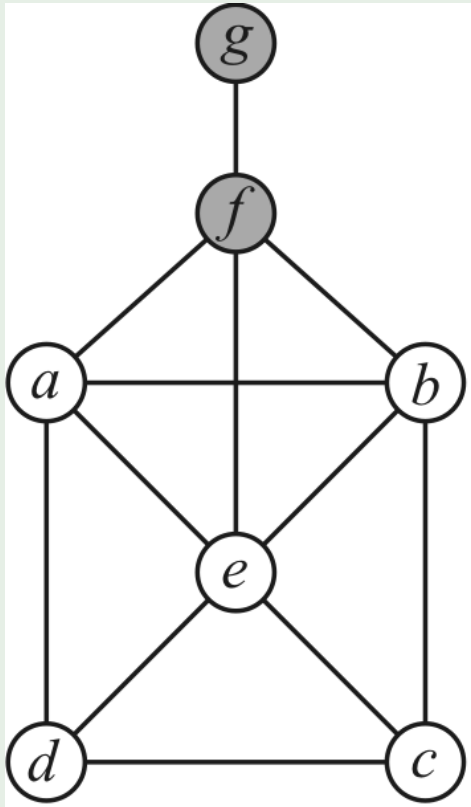
G

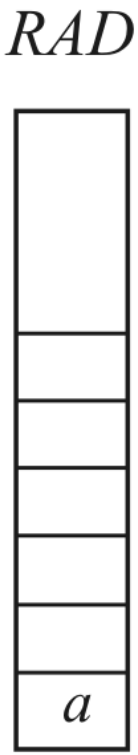
$a : b, d, e, \boldsymbol{f}$
$b : a, c, e, \boldsymbol{f}$
$c : b, d, e$
$d : a, c, e$
$e : a, b, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f} : a, b, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{f}$

dist

a	b	c	d	e	f	g
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0

Príklad





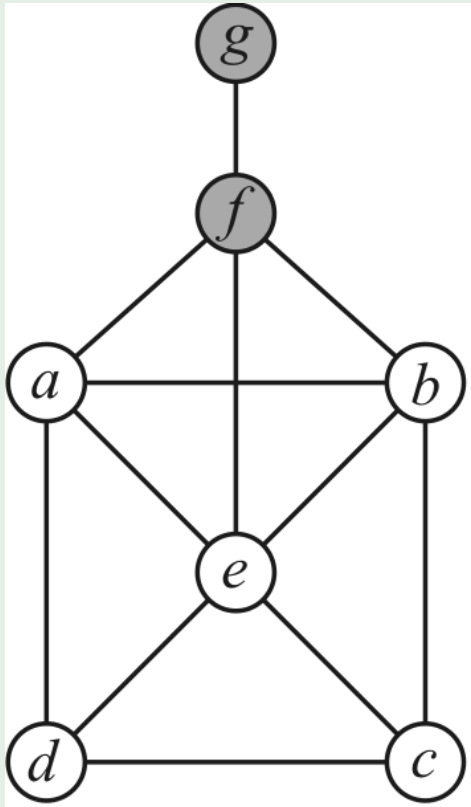
G

$\boldsymbol{a}$: $b, d, e, \boldsymbol{f}$
b : $\boldsymbol{a}, c, e, \boldsymbol{f}$
c : b, d, e
d : $\boldsymbol{a}, c, e$
e : $\boldsymbol{a}, b, c, d, \boldsymbol{f}$
$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{a}, b, e, \boldsymbol{g}$
$\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{f}$

dist

a	b	c	d	e	f	g
2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0

Príklad



RAD

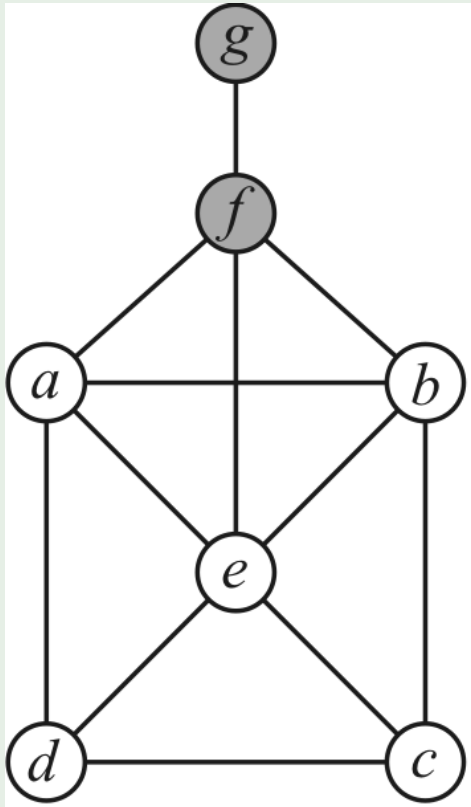
G

a : ***b***, *d*, *e*, ***f***
b : ***a***, *c*, *e*, ***f***
c : ***b***, *d*, *e*
d : ***a***, *c*, *e*
e : ***a***, ***b***, *c*, *d*, ***f***
f : ***a***, ***b***, *e*, ***g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1	0

Príklad



RAD

e
b
a

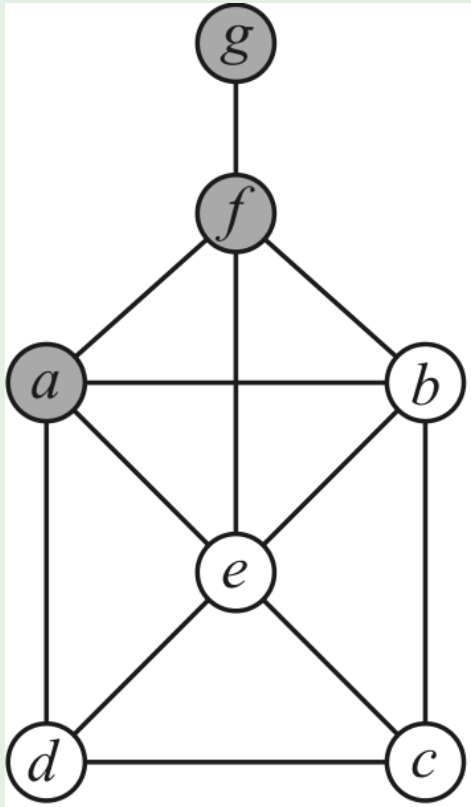
G

a : ***b***, *d*, ***e***, ***f***
b : ***a***, *c*, ***e***, ***f***
c : ***b***, *d*, ***e***
d : ***a***, *c*, ***e***
e : ***a***, ***b***, *c*, *d*, ***f***
f : ***a***, ***b***, ***e***, ***g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	2	$+\infty$	$+\infty$	2	1	0

Príklad



RAD

e
b

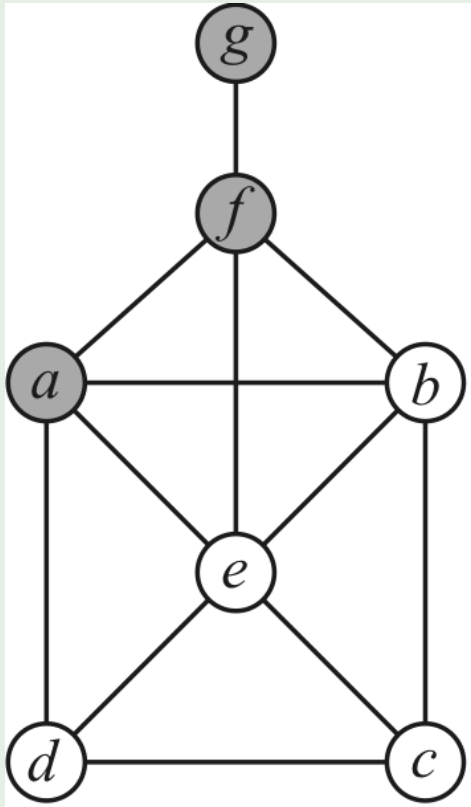
G

a : ***b***, *d*, ***e***, ***f***
b : ***a***, *c*, ***e***, ***f***
c : ***b***, *d*, ***e***
d : ***a***, *c*, ***e***
e : ***a***, ***b***, *c*, *d*, ***f***
f : ***a***, ***b***, ***e***, ***g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	2	$+\infty$	$+\infty$	2	1	0

Príklad



RAD

d
e
b

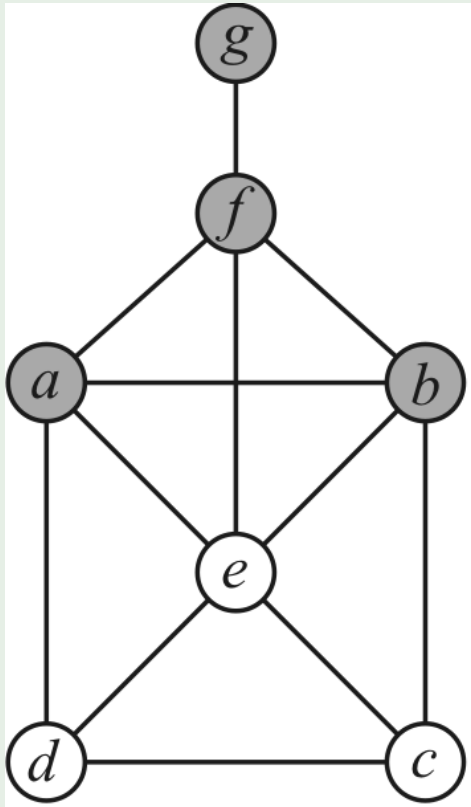
G

a : ***b***, ***d***, ***e***, ***f***
b : ***a***, *c*, ***e***, ***f***
c : ***b***, ***d***, ***e***
d : ***a***, *c*, ***e***
e : ***a***, ***b***, *c*, ***d***, ***f***
f : ***a***, ***b***, ***e***, ***g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	2	$+\infty$	3	2	1	0

Príklad



RAD

d
e

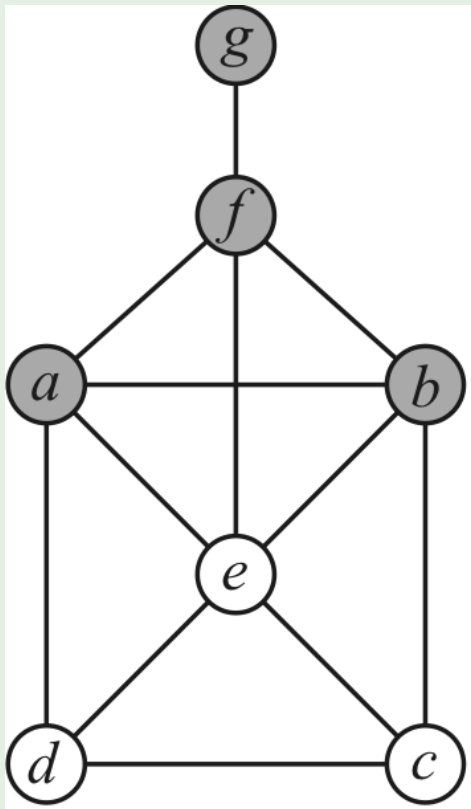
G

a : ***b***, ***d***, ***e***, ***f***
b : ***a***, *c*, ***e***, ***f***
c : ***b***, ***d***, ***e***
d : ***a***, *c*, ***e***
e : ***a***, ***b***, *c*, ***d***, ***f***
f : ***a***, ***b***, ***e***, ***g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	2	$+\infty$	3	2	1	0

Príklad



RAD

c
d
e

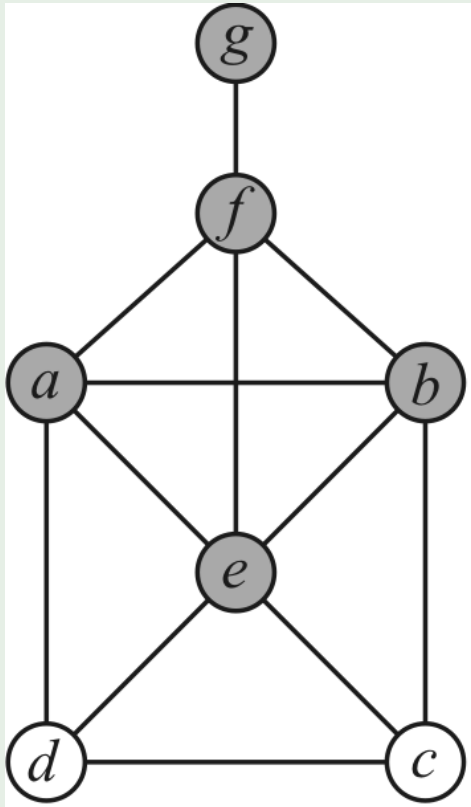
G

a : ***b, d, e, f***
b : ***a, c, e, f***
c : ***b, d, e***
d : ***a, c, e***
e : ***a, b, c, d, f***
f : ***a, b, e, g***
g : ***f***

dist

a	b	c	d	e	f	g
2	2	3	3	2	1	0

Príklad



RAD

c
d

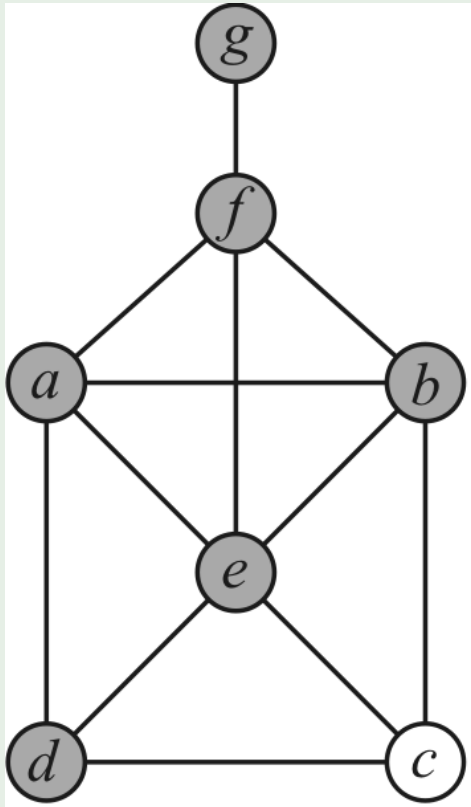
G

a : ***b, d, e, f***
b : ***a, c, e, f***
c : ***b, d, e***
d : ***a, c, e***
e : ***a, b, c, d, f***
f : ***a, b, e, g***
g : ***f***

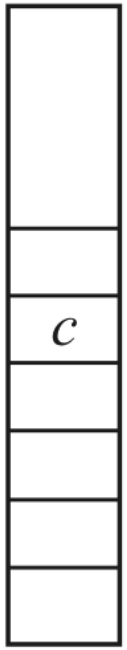
dist

a	b	c	d	e	f	g
2	2	3	3	2	1	0

Príklad



RAD



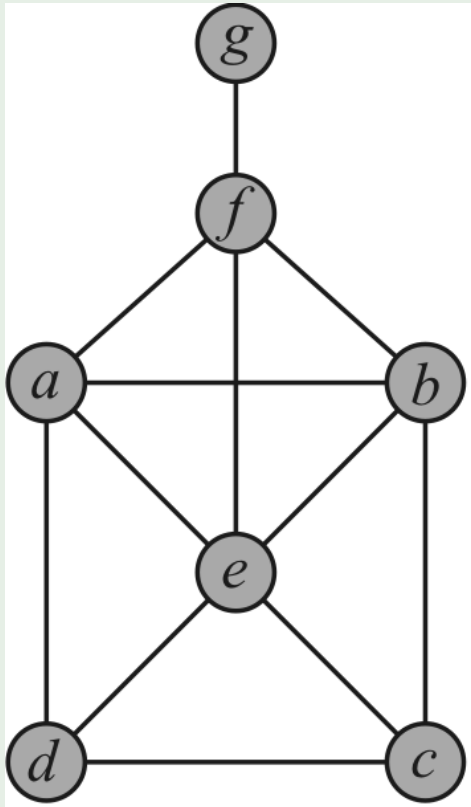
G

a : ***b, d, e, f***
b : ***a, c, e, f***
c : ***b, d, e***
d : ***a, c, e***
e : ***a, b, c, d, f***
f : ***a, b, e, g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	*2*	*3*	*3*	*2*	*1*	*0*

Príklad



RAD

G

a : ***b, d, e, f***
b : ***a, c, e, f***
c : ***b, d, e***
d : ***a, c, e***
e : ***a, b, c, d, f***
f : ***a, b, e, g***
g : ***f***

dist

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
2	*2*	*3*	*3*	*2*	*1*	*0*

Ak potrebujeme určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov v grafe, môžeme použiť predchádzajúci algoritmus pre všetky vrcholy grafu postupne, alebo vypočítať maticu vzdialeností v grafe pomocou Floyd-Warshallovho algoritmu.

Ak potrebujeme určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov v grafe, môžeme použiť predchádzajúci algoritmus pre všetky vrcholy grafu postupne, alebo vypočítať maticu vzdialeností v grafe pomocou Floyd-Warshallovho algoritmu.
Princíp: vychádzajúc z modifikovanej matice susednosti (nuly mimo hlavnej diagonály sa nahradia $+\infty$), postupne sa vypočítajú matice $D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$ také, že $d_{i,j}^{(k)}$ udáva dĺžku takej najkratšej $v_i - v_j$-cesty, ktorá obsahuje len (niektoré) vrcholy z množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Potom platí:

Ak potrebujeme určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov v grafe, môžeme použiť predchádzajúci algoritmus pre všetky vrcholy grafu postupne, alebo vypočítať maticu vzdialeností v grafe pomocou Floyd-Warshallovho algoritmu.

Princíp: vychádzajúc z modifikovanej matice susednosti (nuly mimo hlavnej diagonály sa nahradia $+\infty$), postupne sa vypočítajú matice $D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$ také, že $d_{i,j}^{(k)}$ udáva dĺžku takej najkratšej $v_i - v_j$-cesty, ktorá obsahuje len (niektoré) vrcholy z množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Potom platí:

$$d_{i,j}^{(k)} = \min\{d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}\}$$

Ak potrebujeme určiť vzdialenosti medzi všetkými dvojicami vrcholov v grafe, môžeme použiť predchádzajúci algoritmus pre všetky vrcholy grafu postupne, alebo vypočítať maticu vzdialeností v grafe pomocou Floyd-Warshallovho algoritmu.
Princíp: vychádzajúc z modifikovanej matice susednosti (nuly mimo hlavnej diagonály sa nahradia $+\infty$), postupne sa vypočítajú matice $D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$ také, že $d_{i,j}^{(k)}$ udáva dĺžku takej najkratšej $v_i - v_j$-cesty, ktorá obsahuje len (niektoré) vrcholy z množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Potom platí:

$$d_{i,j}^{(k)} = \min\{d_{i,j}^{(k-1)}, d_{i,k}^{(k-1)} + d_{k,j}^{(k-1)}\}$$

(ak najkratšia $v_i - v_j$-cesta obsahujúca vrcholy z množiny $\{v_1, \ldots, v_k\}$ neprechádza cez v_k, tak jej dĺžka je rovná $d_{i,j}^{(k-1)}$; inak pozostáva z dvoch najkratších ciest medzi v_1 a v_k resp. v_k a v_j, ktoré už neprechádzajú cez v_k a majú dĺžky $d_{i,k}^{(k-1)}$ resp. $d_{k,j}^{(k-1)}$.)
Výsledná matica vzdialeností D je rovná $D^{(n)}$.

Algoritmus pre určenie všetkých vzdialeností v grafe (Floyd-Warshall)

VSTUP: graf $G = (V, E)$ a jeho matica susednosti A
VÝSTUP: pole D

/* inicializácia */
pre ($i = 1..|V|$) opakuj
    pre ($j = 1..|V|$) opakuj
        ak ($A[i, j] = 0$) tak $D[i, j] := +\infty$ inak $D[i, j] := 1$
pre ($i = 1..|V|$) opakuj
    $D[i, i] := 0$
/* samotný algoritmus */
pre ($k = 1..|V|$) opakuj
    pre ($i = 1..|V|$) opakuj
        pre ($j = 1..|V|$) opakuj
            ak ($D[i, k] + D[k, j] < D[i, j]$) tak
                $D[i, j] := D[i, k] + D[k, j]$

Zložitosť algoritmu je $O(n^3)$, kde n je počet vrcholov grafu.

Príklad

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & +\infty & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & +\infty & 1 & 1 & +\infty \\ +\infty & 1 & 0 & 1 & 1 & +\infty & +\infty \\ 1 & +\infty & 1 & 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & +\infty & +\infty & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & +\infty & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & +\infty & 1 & 1 & +\infty \\ +\infty & 1 & 0 & 1 & 1 & +\infty & +\infty \\ 1 & +\infty & 1 & 0 & 1 & +\infty & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & +\infty & +\infty & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & +\infty & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ +\infty & 1 & 0 & 1 & 1 & +\infty & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & +\infty & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & +\infty \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & +\infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & +\infty \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & +\infty \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Príklad

$$D = D_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vzdialenosti v ohodnotených grafoch

Definícia

Nech $G = (V, E, w)$ *je ohodnotený graf a* $u, v \in V$. Dĺžka $u - v$*-sledu* S *je* $w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e)$. Vzdialenosť $d(u, v)$ *vrcholov* u, v *je dĺžka najkratšej* $u - v$*-cesty; ak* u, v *nesúvisia, tak* $d(u, v) := +\infty$.

Vzdialenosti v ohodnotených grafoch

Definícia

Nech $G = (V, E, w)$ *je ohodnotený graf a* $u, v \in V$. Dĺžka $u - v$*-sledu* S *je* $w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e)$. Vzdialenosť $d(u, v)$ *vrcholov* u, v *je dĺžka najkratšej* $u - v$*-cesty; ak* u, v *nesúvisia, tak* $d(u, v) := +\infty$.

Definícia

Kružnica C *v ohodnotenom grafe* $G = (V, E, w)$ *sa nazýva* záporná, *ak* $w(C) < 0$.

Vzdialenosti v ohodnotených grafoch

Definícia

Nech $G = (V, E, w)$ *je ohodnotený graf a* $u, v \in V$. Dĺžka $u - v$*-sledu* S *je* $w(S) = \sum_{e \in E(S)} w(e)$. Vzdialenosť $d(u, v)$ *vrcholov* u, v *je dĺžka najkratšej* $u - v$*-cesty; ak* u, v *nesúvisia, tak* $d(u, v) := +\infty$.

Definícia

Kružnica C *v ohodnotenom grafe* $G = (V, E, w)$ *sa nazýva* záporná, *ak* $w(C) < 0$.

Lema (trojuholníková nerovnosť)

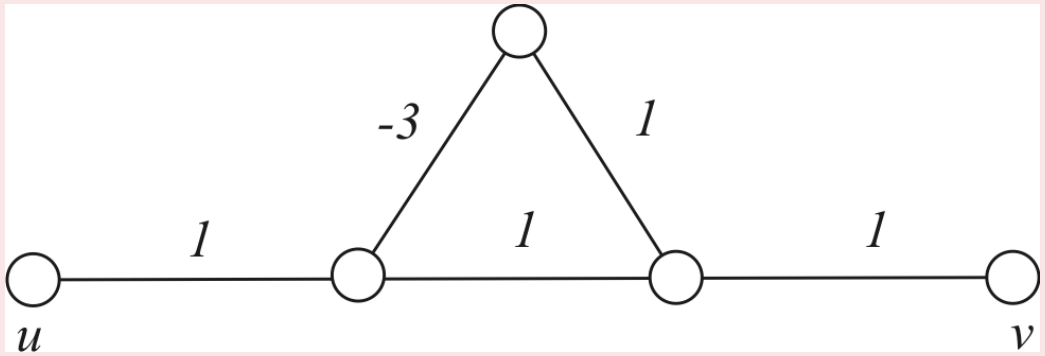
Ak v ohodnotenom grafe $G = (V, E, w)$ *neexistuje záporná kružnica, tak pre každé* $u, v, w \in V$ *platí*

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v).$$

Dôkaz: Stačí uvažovať prípad $d(u,w) < +\infty, d(v,w) < +\infty$. Nech P_1 resp. P_2 je najkratšia $u-v$- resp. v,w-cesta v G. Zreťazenie ciest P_1P_2 je $u-w$-sled, ktorý je buď $u-w$-cesta, alebo z neho možno získať $u-w$-cestu postupným vynechávaním kružníc (t.j. vynechávaním minimálnych podpostupností medzi opakujúcimi sa výskytmi vrcholov v P_1P_2). Keďže G neobsahuje záporné kružnice, tak dĺžka takto získanej cesty je najviac $d(u,v)+d(v,w)$ a aspoň $d(u,w)$.

Upozornenie

Ak v ohodnotenom (orientovanom) grafe $G = (V, E, w)$ existuje záporná kružnica, tak medzi niektorými dvoma vrcholmi u, v **nemusí** existovať najkratší $u - v$-**sled**, hoci v ňom existuje najkratšia $u - v$-cesta:



Záporné kružnice tiež spôsobujú zlyhanie bežných algoritmov pre hľadanie najkratších ciest v ohodnotených grafoch. Budeme preto ďalej predpokladať, že ohodnotenie hrán w je **nezáporné**.

Určovanie vzdialeností vrcholov v ohodnotených grafoch

Algoritmus pre vzdialenosť dvoch vrcholov (Dijkstra)

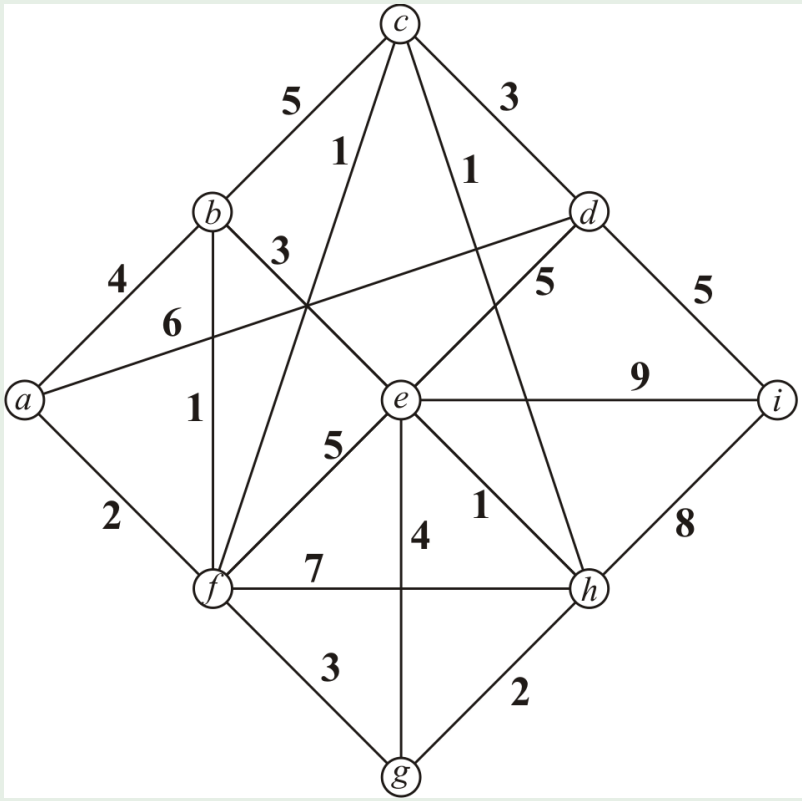
VSTUP: graf $G = (V, E)$, vrcholy u, v
VÝSTUP: polia $dist, pred$

pre každý ($x \in V$) opakuj
    $dist[x] := +\infty$
    $pred[x] := \emptyset$
    označ($x, \emptyset$)
$dist[u] := 0$
opakuj
    vyber neoznačený x s minimálnym $dist[x]$
    označ(x)
    $x \rightarrow r$
    ak ($r = v$) tak KONIEC inak
        pre každé ($ry \in E$: neoznačený(y)) opakuj
            ak ($dist[y] > dist[r] + w(ry)$) tak
                $dist[y] := dist[r] + w(rj)$
                $pred[y] := r$

Po skončení algoritmu sú v poli $dist$ uložené vzdialenosti vrcholov od u; $pred[x]$ je vrchol, ktorý je predchodcom x na najkratšej $u - x$-ceste.

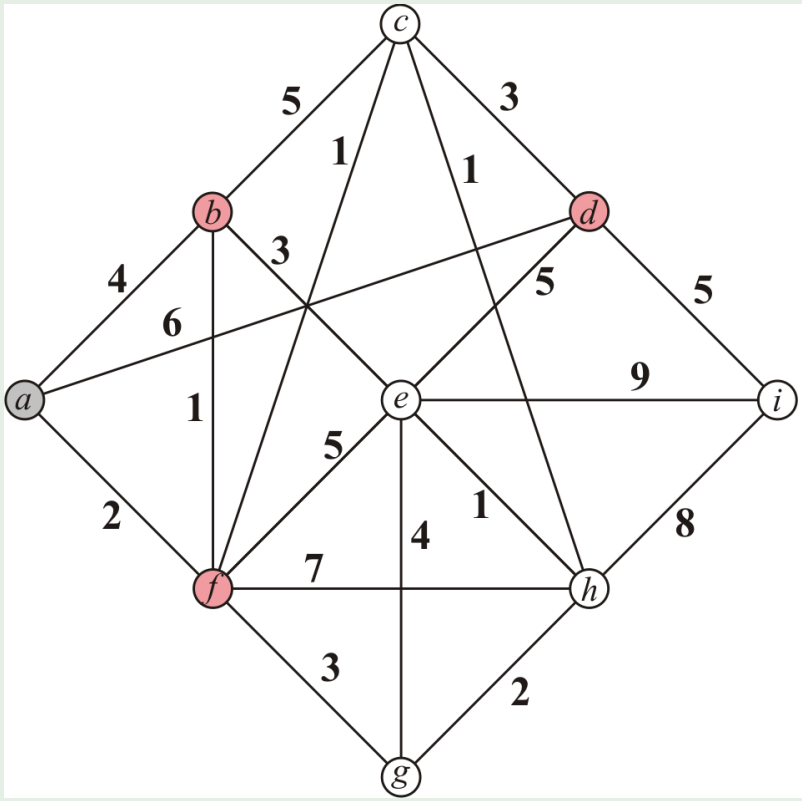
Zložitosť algoritmu je $O(n^2 + m) \sqsubset O(n^2)$.

Príklad



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
pred	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Príklad

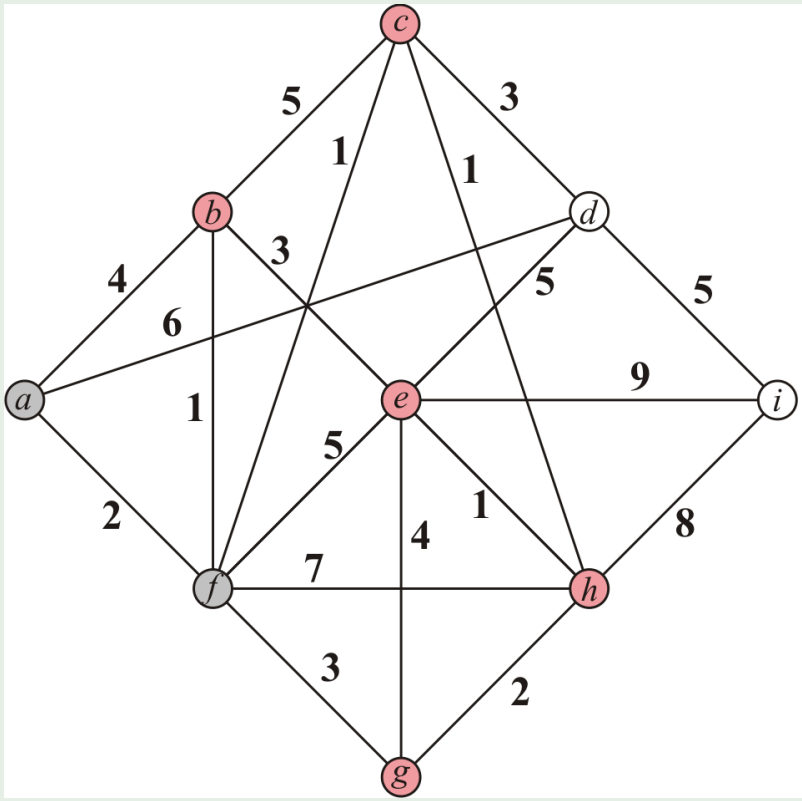


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	4	∞	6	∞	2	∞	∞	∞
pred	∅	a	∅	a	∅	a	∅	∅	∅

$r = a$

neozn. susedia: b, d, f

Príklad

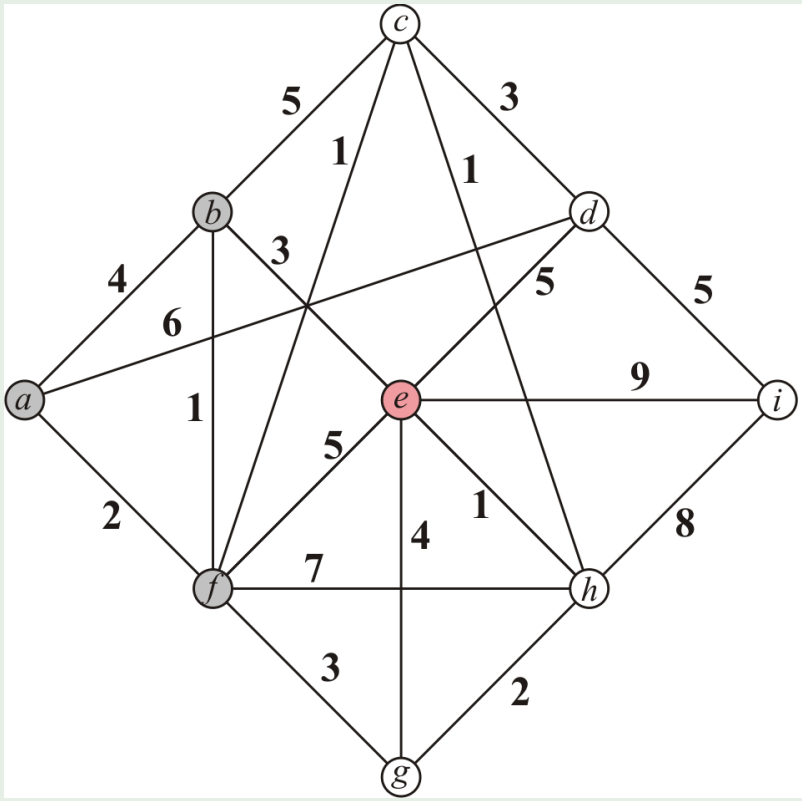


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	7	2	5	9	∞
pred	∅	f	f	a	f	a	f	f	∅

$r = f$

neozn. susedia: b, c, e, g, h

Príklad

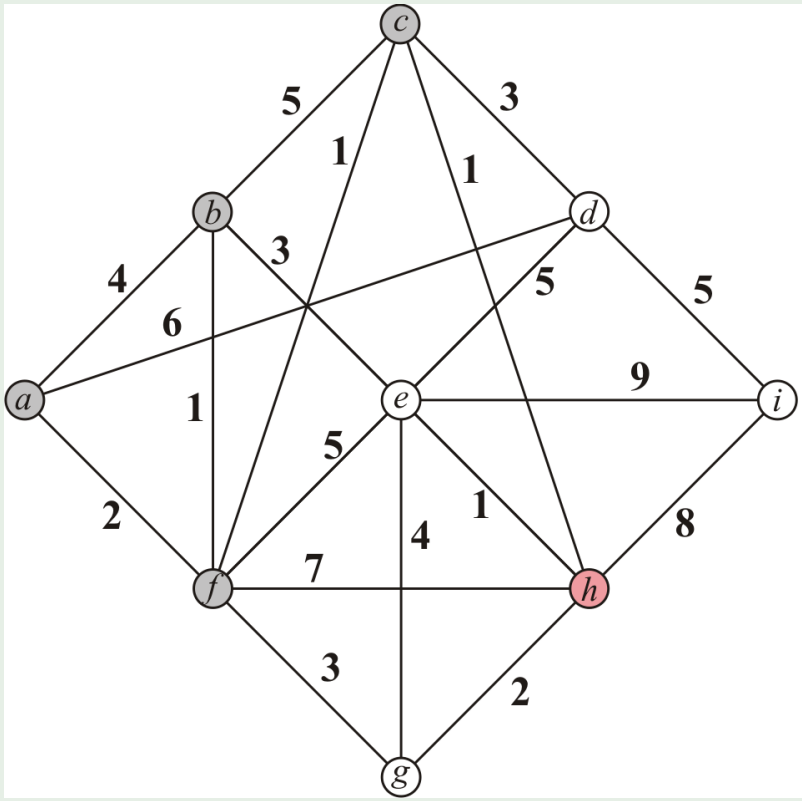


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	6	2	5	9	∞
pred	∅	f	f	a	b	a	f	f	∅

$r = b$

neozn. susedia: c, e

Príklad

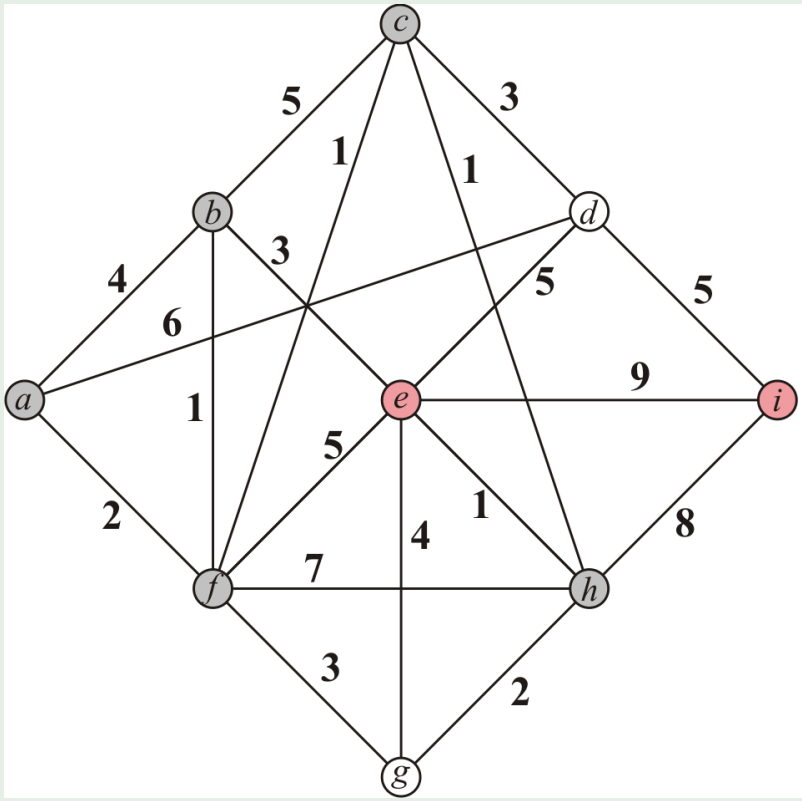


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	6	2	5	4	∞
pred	∅	f	f	a	b	a	f	c	∅

$r = c$

neozn. susedia: d, h

Príklad

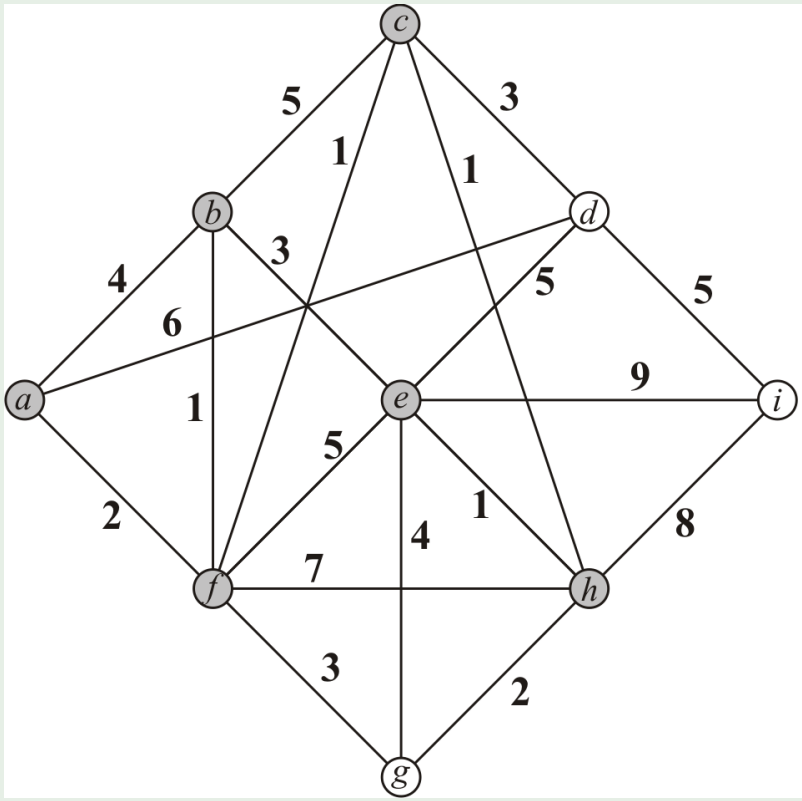


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	5	2	5	4	12
pred	∅	f	f	a	h	a	f	c	h

$r = h$

neozn. susedia: g, i, e

Príklad

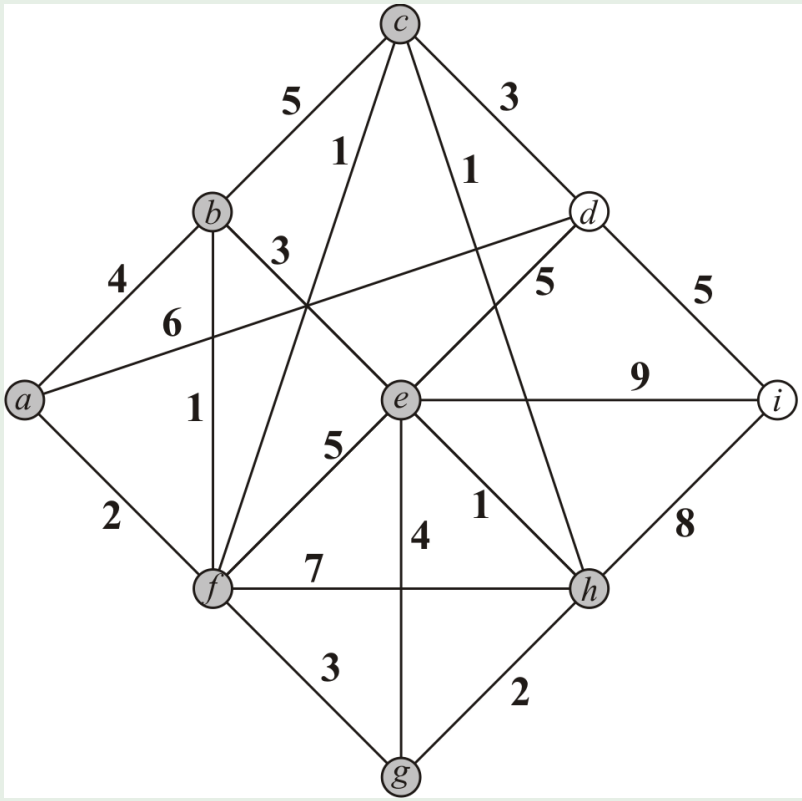


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	5	2	5	4	12
pred	∅	f	f	a	h	a	f	c	h

$r = e$

neozn. susedia: d, g, i

Príklad

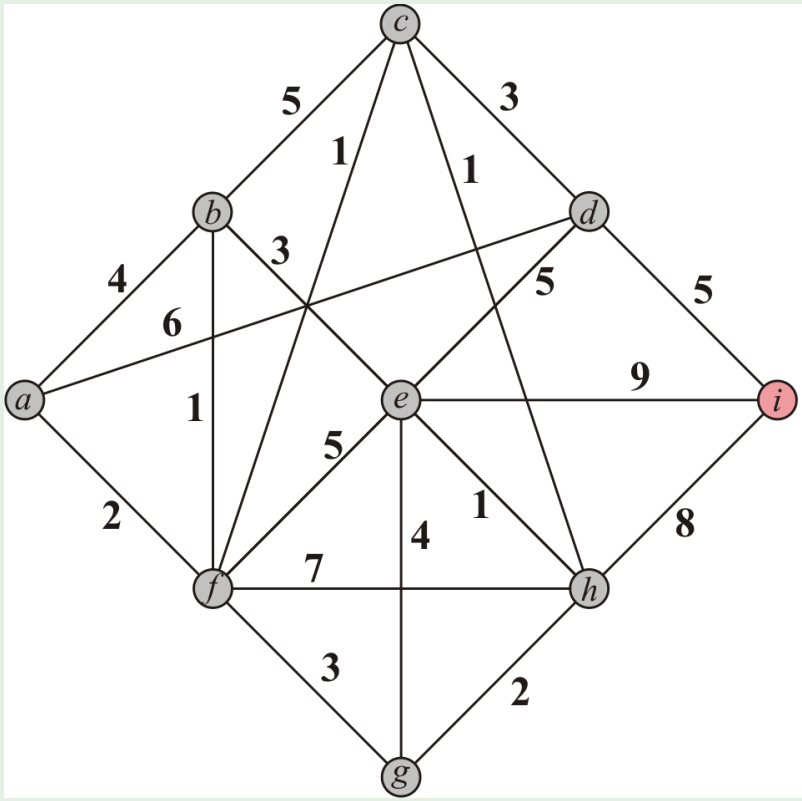


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	5	2	5	4	12
pred	∅	f	f	a	h	a	f	c	h

$r = g$

neozn. susedia: nie sú

Príklad

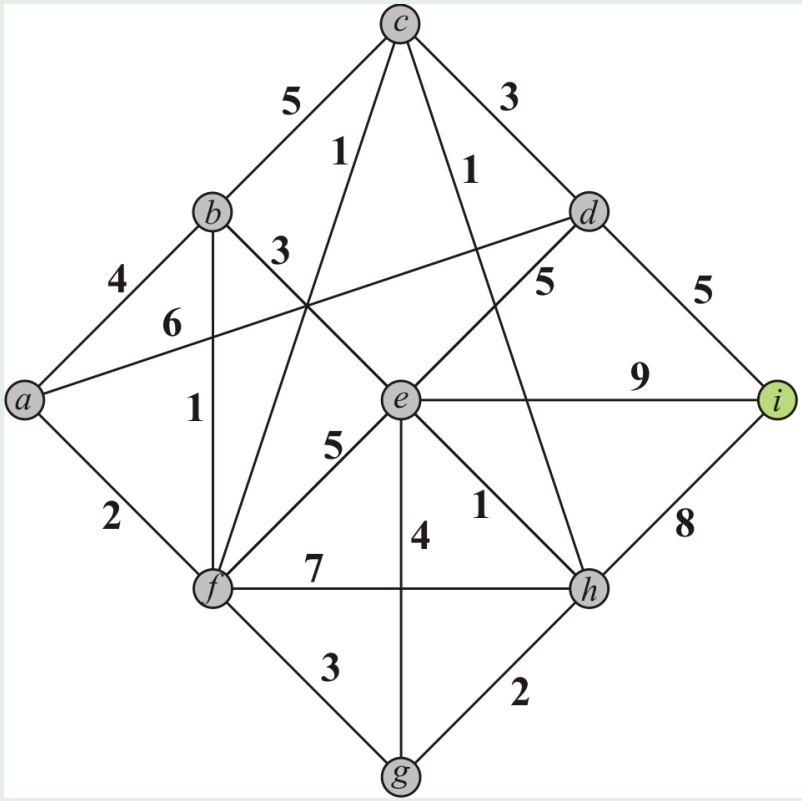


	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	5	2	5	4	11
pred	∅	f	f	a	h	a	f	c	d

$r = d$

neozn. susedia: i

Príklad



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist	0	3	3	6	5	2	5	4	11
pred	∅	f	f	a	h	a	f	c	d

$r = i$
KONIEC