Farbenia grafov

Definícia

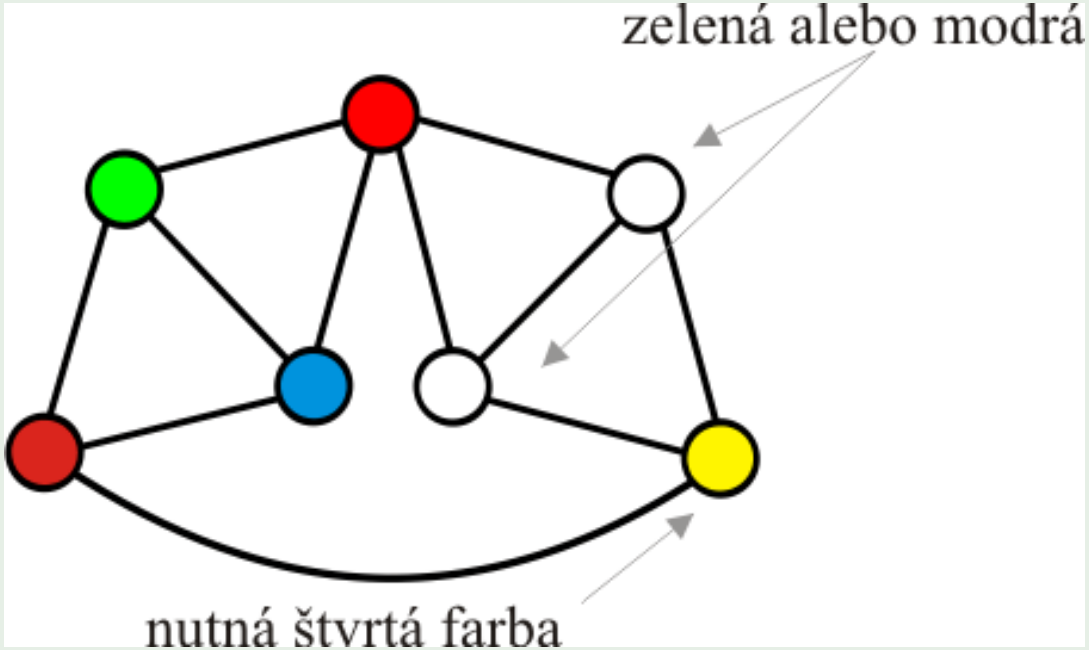
Nech $G = (V, E)$ *je graf.* k-farbenie *grafu* G *je zobrazenie* $c: V \to \{1, \ldots, k\}$. *Farbenie* c *sa nazýva* regulárne, *ak pre každú hranu* $e \in E, e = uv$ *platí* $c(u) \neq c(v)$.

Definícia

Chromatické číslo $\chi(G)$ *grafu* G *je minimálne číslo* k *také, že existuje regulárne* k*-farbenie* G.

Príklad

Chromatické číslo znázorneného grafu je 4:



Lema

$\chi(G) = 1$ *práve vtedy, keď* G *je nulový graf.*

Lema

Nech C_n *je kružnica dĺžky* n*. Potom* $\chi(C_n) = 2$ *pre* n *párne a* $\chi(C_n) = 3$ *pre* n *nepárne.*

Lema

Ak $H \subseteq G$*, tak* $\chi(H) \leq \chi(G)$*.*

Veta

Nech G je súvislý graf. Potom $\chi(G) = 2$ práve vtedy, keď G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.

Dôkaz: Ak $\chi(G) \leq 2$ a graf G by obsahoval kružnicu C nepárnej dĺžky, tak $\chi(C) = 3 \leq \chi(G) \leq 2$, čo je spor.
Obrátene, predpokladajme, že G nie je nulový a neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky. Nech $x \in V(G)$ je ľubovoľný vrchol G. Definujme množiny

$$B = \{y \in V(G) : \ d(x, y) \text{ je párna } \}$$

$$W = \{y \in V(G) : \ d(x, y) \text{ je nepárna } \}$$

(poznamenajme, že $x \in B$). Ukážeme, že graf G je bipartitný a jeho bipartície sú práve množiny B, W (z toho vyplýva $\chi(G) = 2$). Sporom - nech existuje hrana $E \in E, e = uv$ taká, že u aj v sú buď z B, alebo z W; predpokladajme, že $u, v \in B$ (druhý prípad sa dokáže analogicky).

Nech P_1 je najkratšia $x - u$-cesta a nech P_2 je najkratšia $x - v$-cesta v G. Nech z je posledný spoločný vrchol P_1, P_2, ktorý je rôzny od u; potom takisto $z \neq v$, inak by $d(x, u), d(x, v)$ mali rôznu paritu a teda by neplatilo $u, v \in B$. Potom platí, že $z - u$-cesta P_1' a $z - v$-cesta P_2', ktoré sú súčasťou P_1 resp. P_2, majú dĺžky rovnakej parity. Tieto cesty však spolu s hranou uv vytvárajú kružnicu nepárnej dĺžky, čo je spor.

Veta

Pre každý graf G platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Dôkaz: úplnou matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu. Nech G je graf s n vrcholmi a nech veta platí pre všetky grafy s menej ako n vrcholmi. Nech x je vrchol maximálneho stupňa v G. Graf $G' = G - x$ má menej vrcholov ako G, teda podľa indukčného predpokladu platí $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ ($G' \subseteq G$, teda $\Delta(G') \leq \Delta(G)$). Teda existuje regulárne $(\Delta(G) + 1)$-farbenie grafu G'. Toto farbenie možno rozšíriť na $(\Delta(G) + 1)$-farbenie celého grafu G tým, že vrcholu x priradíme tú farbu z množiny $\{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$, ktorá je rôzna od farieb vrcholov, ktoré susedia s x v G (keďže k dispozícii je o jednu viacej farieb, ako je susedov x, takú farbu možno vždy zvoliť).

Veta (Brooks 1941)

Ak G nie je kompletný graf ani kružnica nepárnej dĺžky, tak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Veta

Pre každý planárny graf G platí $\chi(G) \leq 6$.

Dôkaz: úplnou matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu.
Nech G je planárny graf s n vrcholmi a nech veta platí pre všetky planárne grafy s menej ako n vrcholmi. Potom G obsahuje vrchol x stupňa najviac 5. Graf $G' = G - x$ je planárny a má menej vrcholov ako G, teda podľa indukčného predpokladu platí $\chi(G') \leq 6$. Teda existuje regulárne 6-farbenie grafu G'. Toto farbenie možno rozšíriť na 6-farbenie celého grafu G tým, že vrcholu x priradíme tú farbu z množiny $\{1, \ldots, 6\}$, ktorá je rôzna od farieb vrcholov, ktoré susedia s x v G (keďže k dispozícii je o jednu viacej farieb, ako je maximálny počet susedov x, takú farbu možno vždy zvoliť).

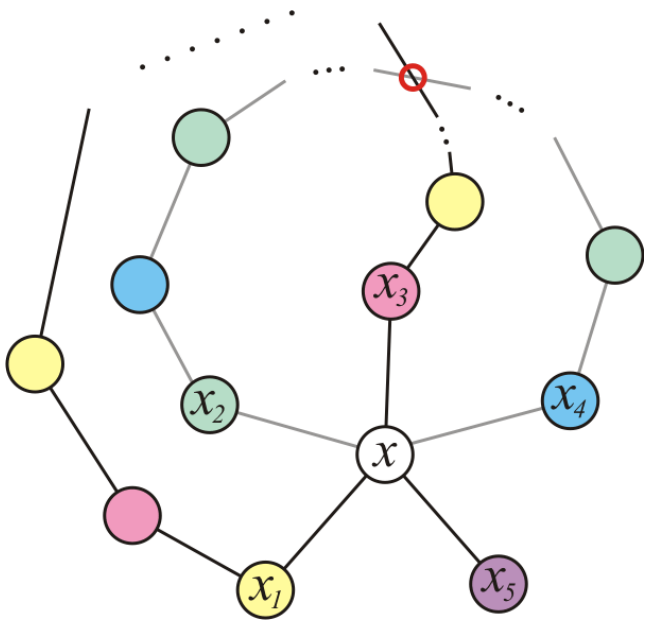
Veta (Heawood)

Pre každý planárny graf G platí $\chi(G) \leq 5$.

Dôkaz: úplnou matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu.
Nech G je planárny graf s n vrcholmi a nech veta platí pre všetky planárne grafy s menej ako n vrcholmi. Potom G obsahuje vrchol x stupňa najviac 5. Uvažujme rovinné nakreslenie grafu $G' = G - x$. Toto nakreslenie má menej vrcholov ako G, teda podľa indukčného predpokladu platí $\chi(G') \leq 5$. Teda existuje regulárne 5-farbenie grafu G'. Ak stupeň x je najviac 4, tak toto farbenie možno rozšíriť na 5-farbenie celého grafu G tým, že vrcholu x priradíme tú farbu z množiny $\{1, \ldots, 5\}$, ktorá je rôzna od farieb vrcholov, ktoré susedia s x v G (keďže k dispozícii je o jednu viacej farieb, ako je maximálny počet susedov x (4), takú farbu možno vždy zvoliť).

Predpokladajme teda, že x má stupeň 5 a nech $x_1, \ldots, x_5$ sú jeho susedia. Ak v 5-farbení grafu G' sú na vrcholy $x_1, \ldots, x_5$ použité najviac 4 farby, tak existuje voľná farba na regulárne dofarbenie vrchola x, čím možno 5-farbenie G' rozšíriť na G. Nech teda $c(x_i) = i$ pre $i = 1, \ldots, 5$.
Nech $V_i, i = 1, \ldots, 5$ je množina všetkých vrcholov grafu $G - x$, ktoré sú ofarbené farbou i, a nech $G_{i,j}$ je podgraf $G - x$ indukovaný množinou $V_i \cup V_j$. Uvažujme graf $G_{1,3}$. Ak x_1 a x_3 sú z rôznych komponentov $G_{1,3}$, tak v komponente, ktorý obsahuje vrchol x_3 možno vymeniť farby 1 a 3 na vrcholoch, čím dostaneme 5-farbenie grafu $G - x$ také, že susedia x sú ofarbení len 4 farbami (teda možno dofarbiť x voľnou piatou farbou). . Nech teda x_1, x_3 patria tomu istému komponentu $G_{1,3}$; to znamená, že existuje $x_1 - x_3$-cesta taká, že jej vrcholy majú striedavo farby 1 a 3. Úvahu zopakujeme pre graf $G_{2,4}$ a vrcholy x_2, x_4; preto možno predpokladať, že vrcholy x_2, x_4 patria tomu istému komponentu grafu $G_{2,4}$.

Teda existuje $x_2 - x_4$-cesta taká, že jej vrcholy majú striedavo farby 2 a 4. Táto cesta spolu s vrcholom x tvorí kružnicu Z v G takú, že x_3 leží v jej vnútrajšku a x_1 leží v jej vonkajšku:



Nakoľko x_1 a x_3 sú spojené cestou, na ktorej sa striedajú farby 1 a 3, niektorá hrana tejto cesty musí pretínať niektorú hranu kružnice Z. To je však spor s tým, že G je rovinný graf.

Veta (Appel, Haken 1977)

Pre každý planárny graf G platí $\chi(G) \leq 4$.