Princíp inklúzie/exklúzie

Ak sú dve konečné množiny A, B disjunktné, tak podľa pravidla súčtu platí

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Ak nie sú disjunktné, tak platí

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

(schematický dôkaz napr. pomocou Vennových diagramov)
Pre tri množiny A, B, C máme vzťah

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Veta (princíp inklúzie/exklúzie)

Nech $A_1, \ldots, A_m$ sú konečné množiny. Potom

$$\left|\bigcup_{i=0}^{m} A_i\right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

pričom suma prebieha cez všetky neprázdne podmnožiny množiny $\{1, \ldots, m\}$.

Dôkaz: Uvažujme ľubovoľný prvok $x \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Potom k počtu prvkov zjednotenia $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right|$ tento prvok prispieva počtom 1. Spočítame, koľko tento prvok prispieva k sume na pravej strane rovnosti.

Nech x patrí práve j množinám spomedzi $A_1, \ldots, A_n, 1 \leq j \leq n$; bez ujmy na všeobecnosti ich môžeme preindexovať tak, aby x patril práve množinám $A_1, \ldots, A_j$. Prvok x sa teda objavuje v prieniku každej k-tice množín z $A_1, \ldots, A_j$ a v žiadnych iných prienikoch; teda x sa objavuje v $\binom{j}{k}$ prienikoch k-tíc množín z $A_1, \ldots, A_j$. Prvok x teda na pravej strane prispieva počtom

$$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \cdots + (-1)^{j+1}\binom{j}{j}$$

To je podľa binomickej vety rovné 1 ($= \binom{j}{0}$), pretože $0 = (1-1)^n = -\binom{j}{0} + \binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \cdots + (-1)^{j+1}\binom{j}{j}$.

Interpretácia rovnosti z vety: ak je daná množina S, ktorej prvky môžu mať vlastnosti $p_1, \ldots, p_m$ a $A_i \subseteq S$ obsahuje tie prvky S, ktoré majú vlastnosť p_i, tak ľavá strana rovnosti udáva počet prvkov S, ktoré majú aspoň jednu z vlastností $p_1, \ldots, p_m$. Na pravej strane sa potom započítava (zohľadňujúc znamienko) počet prvkov, ktoré majú súčasne niekoľko vlastností.

Označenie: $\overline{X} = S \setminus X$, kde $X \subseteq S$

Dôsledok

Nech je daná konečná množina S a nech $A_1, \ldots A_m \subseteq S$. Potom

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A}_i\right| = |S| - \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,m\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Interpretácia: ľavá strana rovnosti udáva počet tých prvkov množiny S, ktoré nemajú žiadnu z vlastností $p_1, \ldots, p_m$.

Dôsledok

Nech je daná konečná množina S a nech $A_1, \ldots A_m \subseteq S$. Ak pre každé $t \in \{1, \ldots m\}$ a pre ľubovoľnú množinu $I = \{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ počet prvkov $\bigcap_{i \in I} A_i$ závisí len na t, tak

$$\left| \bigcap_{i=1}^{m} \overline{A}_i \right| = |S| + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \left| \bigcap_{j=1}^{i} A_j \right|.$$

Príklad

Koľko kladných celých čísel menších ako 10000 nie je deliteľných 4 ani 6 ani 10?

Nech p_1 označuje vlastnosť "číslo je deliteľné 4", p_2 vlastnosť "číslo je deliteľné 6" a p_3 vlastnosť "číslo je deliteľné 10". Potom (použijúc predošlé označenia) $|S| = 9999, |A_1| = \lfloor \frac{9999}{4} \rfloor = 2499, |A_2| = \lfloor \frac{9999}{6} \rfloor = 1666, |A_3| = \lfloor \frac{9999}{10} \rfloor = 999$. Ďalej je $|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{9999}{12} \rfloor = 833$ (číslo je deliteľné 4 a zároveň 6 práve vtedy, keď je deliteľné 12), $|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{9999}{30} \rfloor = 333, |A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{9999}{20} \rfloor = 499, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{9999}{60} \rfloor = 166$. Podľa princípu inklúzie/exklúzie je potom počet hľadaných čísel rovný $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| =$
$9999 - 2499 - 1666 - 999 + 833 + 499 + 333 - 166 = \mathbf{6334}$.

Definícia

Číslo $i \in \{1, \ldots, n\}$ *je* pevný bod *permutácie* $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, *ak* $\pi(i) = i$.

Príklad

Koľko je n-prvkových permutácií, ktoré nemajú žiaden pevný bod ?

Nech S je množina všetkých n-prvkových permutácií a nech p_i pre $i \in \{1, \ldots, n\}$ označuje vlastnosť "i je pevný bod permutácie". Potom $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_n| = (n-1)!$ (fixujeme jedno číslo ako pevný bod, zvyšných $n-1$ čísel možno na ich miestach preusporiadať $(n-1)!$ spôsobmi), pre všetky $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ je $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ (pre fixované dva pevné body i, j možno zvyšných $n-2$ čísel na ich miestach usporiadať $(n-2)!$ spôsobmi).

Príklad (pokr.)

Vo všeobecnosti, pre každé $t = 1, \ldots, n$ a pre každú množinu indexov $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (n-t)!$. Podľa dôsledku princípu inklúzie/exklúzie potom dostávame, že počet n-prvkových permutácií bez pevného bodu je rovný

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots$$

$$+(-1)^t\binom{n}{t}(n-t)! + \cdots = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Pre dostatočne veľké n platí

$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \approx \frac{n!}{e}$$

Definícia

Eulerova funkcia $\varphi(n)$ prirodzeného čísla n je počet prirodzených čísel menších ako n, ktoré sú s n nesúdeliteľné.

Príklad

Odvoďte vzťah pre $\varphi(n)$.

Nech $n = p_1^{\alpha^1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom čísla, ktoré sa nezapočítajú do hodnoty $\varphi(n)$ sú práve tie čísla menšie ako n, ktoré sú násobky niektorého p_i.
Označme $A_i = \{m \in \{1, \dots, n\} : \ p_i | m\}$. Potom
$\varphi(n) = n - \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right|$.
Ďalej je $|A_i| = \dfrac{n}{p_i}, |A_i \cap A_j| = \dfrac{n}{p_i p_j}$ a pre každé $t = 1, \dots, n$ a pre každú množinu indexov $\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí
$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}| = \dfrac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_t}}$.

Príklad (pokr.)

Podľa princípu inklúzie/exklúzie potom platí

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{n}{p_i p_j}$$

$$- \cdots + (-1)^t \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n} \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_t}} + \cdots = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$