Základné typy výberov

Výbery sa delia na:

- výbery bez opakovania
  - permutácie
  - variácie
  - kombinácie
- výbery s opakovaním
  - permutácie s opakovaním
  - variácie s opakovaním
  - kombinácie s opakovaním

Permutácie

Definícia

Permutácia konečnej množiny X je prosté zobrazenie X do X.

V kombinatorike sa zvyčajne uvažujú len permutácie n-prvkovej množiny $\{1, \ldots, n\}$. Permutácie možno reprezentovať viacerými spôsobmi:

- dvojriadkovým zápisom

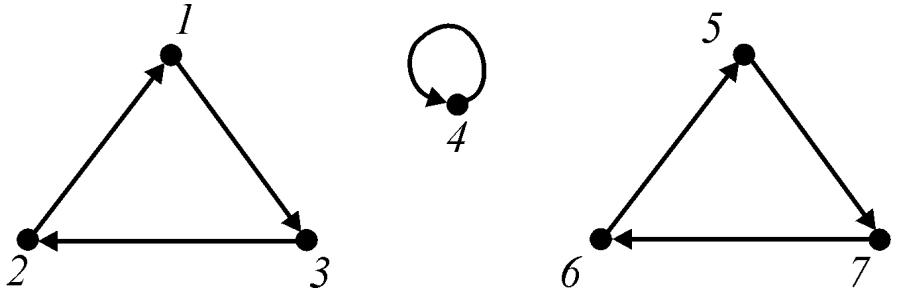
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

  (v druhom riadku sú obrazy čísel z prvého riadku)

- jednoriadkovým zápisom

$$(3\ 1\ 2\ 4\ 7\ 5\ 6)$$

- grafom



- zápisom všetkých cyklov permutácie

$$(132)(4)(576)$$

(v každej zátvorke je cyklická postupnosť prvkov postupne sa zobrazujúcich na seba)

Veta

Počet všetkých permutácií n-prvkovej množiny je rovný $\prod_{i=1}^{n} i$.

Označenie: $n! = \prod_{i=1}^{n}$ ("n faktoriál"); pre $n = 0$ sa definuje $0! := 1$ (prázdnu množinu možno usporiadať jediným spôsobom).

Vlastnosti funkcie faktoriál:

- $n! = n \cdot (n-1)!$ pre $n \geq 1$ (rekurzia)
- pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je $n! > a^n$
- pre veľké n platí približne $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (Stirlingov vzorec)

Variácie

Definícia

k-prvková variácia z n prvkov je usporiadaná k-tica navzájom rôznych prvkov z n-prvkovej množiny.

Ekvivalentná definícia je, že k-prvková variácia z n prvkov je prosté zobrazenie k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny.

Veta

Počet všetkých k-prvkových variácií z n prvkov je rovný $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$.

Platí $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (z praktického hľadiska však tento vzorec nie je vhodný na výpočet počtu variácií)

Kombinácie

Definícia

k-prvková kombinácia z n prvkov je k-prvková podmnožina n-prvkovej množiny.

Veta

Počet všetkých k-prvkových kombinácií z n prvkov je rovný

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Označenie: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, 0 \leq k \leq n$ (kombinačné číslo (al. binomický koeficient) "n nad k")

Veta

Pre všetky prirodzené čísla $n, k, 0 \leq k \leq n$ platí:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Na základe predchádzajúcej vety možno vytvoriť určitú schému, tzv. Pascalov trojuholník:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

V tomto trojuholníku je každé číslo rovné súčtu dvoch čísel ležiacich bezprostredne nad ním.

Veta (binomická)

Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Dôkaz: matematickou indukciou podľa n.

1° : Pre $n = 0$ je $(1+x)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0$.

2° : Nech tvrdenie platí pre $n = k$, t.j. nech $(1+x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j$.

Pre $n = k+1$ je

Dôkaz (pokr.):

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \overset{i.p.}{=} (1+x)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k+1} = \binom{k}{0}x^0 + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}x^j +$$

$$\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}x^j + \binom{k}{k}x^{k+1} = \binom{k}{0}x^0 + \sum_{j=1}^{k}\left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right)x^j +$$

$$\binom{k}{k}x^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^0 + \sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}x^j + \binom{k+1}{k+1}x^{k+1} =$$

$$\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}x^j.$$

Dôsledok

Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

Dôkaz: platí $(x+y)^n = \left(y\left(1+\frac{x}{y}\right)\right)^n = y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n = y^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\left(\frac{x}{y}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$.

Dôsledok

Počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny je rovný 2^n.

Dôkaz: Počet všetkých k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny je rovný $\binom{n}{k}$ (použitím definície kombinácií). Počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny je potom rovný $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$.

Dôsledok

Počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je rovný 2^{n-1}.

Dôkaz: Podľa binomickej vety platí

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j =$$

$$\sum_{0 \le j \le n, n \text{ párne}} \binom{n}{j} - \sum_{0 \le j \le n, n \text{ nepárne}} \binom{n}{j}.$$

Teda $\sum_{0 \le j \le n, n \text{ párne}} \binom{n}{j} = \sum_{0 \le j \le n, n \text{ nepárne}} \binom{n}{j}$, čiže počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je rovný počtu tých, ktoré majú nepárny počet prvkov. Z toho dostávame, že počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je rovný polovici počtu všetkých podmnožín, teda $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$.

Veta

Pre všetky prirodzené čísla n platí $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Dôkaz: Keďže $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, tak $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}$.
Ukážeme, že táto suma vyjadruje počet n-prvkových podmnožín $2n$-prvkovej množiny (čo je $\binom{2n}{n}$).
Uvažujme $2n$-prvkovú množinu, ktorá má n červených a n modrých prvkov. Vybrať nejakú n-prvkovú podmnožinu tejto množiny znamená vybrať nejakú i-prvkovú podmnožinu z červených prvkov a k nej nejakú $(n-i)$-prvkovú podmnožinu z modrých prvkov (pre $i \in \{0, \ldots, n\}$). Pre pevne dané i je $\binom{n}{i}$ možností výberu červenej podmnožiny a $\binom{n}{n-i}$ možností výberu modrej podmnožiny. To dáva dokopy $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}$ možností výberu červenej a modrej podmnožiny s n prvkami dokopy.

Permutácie s opakovaním

Definícia

Nech $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \cdots + n_k = n$ *a nech* $X = \{1, \ldots, k\}$. *Permutácia s opakovaním (kde prvok* $i \in X$ *sa opakuje* n_i*-krát) je usporiadaná* n*-tica prvkov z* X *obsahujúca* n_i *prvkov* $i \in X$.

Veta

Nech $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \cdots + n_k = n$ *a nech* $X = \{1, \ldots, k\}$. *Počet všetkých permutácií prvkov* X *s opakovaním, kde prvok* i *sa opakuje* n_i*-krát, je rovný* $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$.

Označenie: $\binom{n}{n_1 \ldots n_k} = \dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$ (multinomický koeficient "n nad $n_1, \ldots, n_k$")

Veta (multinomická)

Pre ľubovoľné $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{[n_1, \ldots, n_k] \in \mathbb{N}^k \\ n_1 + \cdots + n_k = n}} \binom{n}{n_1 \ldots n_k} \prod_{i=1}^{k} {x_i}^{n_i}.$$

Dôkaz: Ľavá strana rovnosti je súčin n rovnakých zátvoriek

$$\underbrace{(x_1 + \cdots + x_n) \cdot \cdots \cdot (x_1 + \cdots + x_n)}_{n\text{-krát}} = \sum_{i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}} a_{i_1, \ldots, i_k} {x_1}^{i_1} \ldots {x_k}^{i_k}$$

Uvažujme fixnú k-ticu $[i_1, \ldots, i_k]$ prirodzených čísel takú, že $i_1 + \cdots + i_k = n$ (vzhľadom na roznásobenie zátvoriek) a zisťujme, akým spôsobom možno pri roznásobovaní zátvoriek získať všetky členy tvaru ${x_1}^{i_1} \ldots {x_k}^{i_k}$. Dostaneme ich tak, že z n zátvoriek vyberieme i_1 premenných x_1, z $n - i_1$ zátvoriek vyberieme i_2 premenných x_2, z $n - i_1 - i_2$ zátvoriek i_3 premenných x_3 atď.

Dôkaz (pokr.): Využijúc zovšeobecnené pravidlo súčinu máme, že počet spôsobov, ktorými možno získať člen tvaru ${x_1}^{i_1} \dots {x_k}^{i_k}$ (čiže koeficient $a_{i_1,\dots,i_k}$) je rovný

$$\binom{n}{i_1} \cdot \binom{n-i_1}{i_2} \cdot \binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i_1-\dots-i_{k-1}}{i_k} =$$

$$\frac{n!}{i_1!(n-i_1)!} \cdot \frac{(n-i_1)!}{i_2!(n-i_1-i_2)!} \cdot \frac{(n-i_1-i_2)!}{i_3!(n-i_1-i_2-i_3)!} \dots \frac{(n-i_1-\dots-i_{k-1})!}{i_k!0!} =$$

$$\frac{n!}{i_1!i_2!\dots i_k!} = \binom{n}{i_1 i_2 \dots i_k}$$

Variácie s opakovaním

Definícia

k-prvková variácia s opakovaním z n prvkov je usporiadaná k-tica prvkov z n-prvkovej množiny.

Veta

Počet všetkých k-prvkových variácií s opakovaním z n prvkov je rovný n^k.

Kombinácie s opakovaním

Definícia

Multimnožina *je zobrazenie konečnej množiny* X *do množiny* $\mathbb{Z}^+$.

Interpretácia: hodnoty priradené prvkom množiny X v danom zobrazení vyjadrujú počet opakovaní jednotlivých prvkov v multimnožine.

Príklad: $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ (prvky 1 a 5 sa vyskytujú v troch kópiách, prvky 2 a 4 v dvoch a prvok 3 v jedinej)

Definícia

k*-prvková kombinácia s opakovaním z* n *prvkov je multimnožina veľkosti* k*, ktorej prvky sú z nejakej* n*-prvkovej množiny.*

Veta

Počet všetkých k*-prvkových kombinácií s opakovaním z* n *prvkov je rovný* $\binom{n+k-1}{k}$.

Dôkaz: Uvažujme n priehradok (zodpovedajú typom objektov). Zvoliť konkrétnu k-prvkovú kombináciu s opakovaním z n prvkov znamená umiestniť do týchto priehradok celkovo k nerozlíšiteľných objektov. Každé takéto rozmiestnenie vieme jednoznačne zakódovať postupnosťou $n-1$ núl a k jednotiek (jednotky zodpovedajú objektom, nuly separátorom medzi priehradkami) a naopak. Preto počet k-prvkových kombinácií s opakovaním z n prvkov je rovný počtu binárnych postupností pozostávajúcich z $n-1$ núl a k jednotiek. Takýchto postupností je práve $\binom{n-1+k}{k}$, pretože každá taká postupnosť jednoznačne zodpovedá nejakej k-prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \ldots, n-1+k\}$ (prvky podmnožiny kódujú pozície jednotiek v postupnosti).