Stromy

Definícia

Strom *je súvislý graf, ktorý neobsahuje kružnicu ako podgraf.*

Definícia

Les *je graf neobsahujúci kružnicu ako podgraf.*

Lema

Každý strom s aspoň dvomi vrcholmi obsahuje aspoň dva visiace vrcholy.

Dôkaz: Nech T je strom s aspoň dvomi vrcholmi a nech $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ je najdlhšia cesta v T. Ak $\deg(v_k) \geq 2$, tak existuje vrchol $y \neq v_{k-1}$ susedný s v_k. Zrejme $y \notin \{v_0, \ldots, v_{k-2}\}$ (inak v T existuje kružnica); potom však cestu P možno predĺžiť o hranu $v_k y$, čo je spor. Rovnakú úvahu možno použiť aj na vrchol v_0; teda v T sú vrcholy v_0 aj v_k visiace.

Veta

Nech G je n-vrcholový graf s m hranami. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

(i) *G je strom*

(ii) *medzi ľubovoľnou dvojicou vrcholov v G existuje jediná cesta*

(iii) *G je súvislý a $m = n - 1$*

(iv) *G neobsahuje kružnicu a $m = n - 1$*

(v) *G neobsahuje kružnicu a ak ľubovoľné dva nesusedné vrcholy v ňom spojíme hranou, tak vznikne graf s práve jednou kružnicou*

Dôkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii): sporom: nech existuje strom G taký, že medzi dvomi vrcholmi $u, v \in V(G)$ existujú aspoň dve $u - v$-cesty; označme tieto cesty P_1, P_2. Potom existujú vrcholy u', v' také, že patria obom cestám P_1, P_2 a $u' - v'$-cesty P_1', P_2', ktoré sú súčasťou P_1 resp. P_2 nemajú okrem koncových vrcholov žiadne iné spoločné vrcholy (napr. u' je prvý vrchol, v ktorom sa tieto cesty rozchádzajú a v' je prvý vrchol po u', v ktorom sa opäť stretajú). Zjednotenie P_1', P_2' vytvára kružnicu v G, čo je spor.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): z predpokladu (ii) dostávame, že graf G je súvislý. Ďalej postupujeme úplnou matematickou indukciou podľa počtu n vrcholov G. Nech $e = uv$ je ľubovoľná hrana v G. Podľa (ii) je táto hrana jedinou $u - v$-cestou v G, teda v grafe $G - uv$ vrcholy u, v nesúvisia. Nakoľko odobratie hrany zväčší počet komponentov najviac o 1, graf $G - uv$ pozostáva z práve dvoch komponentov G_1, G_2 s n_1 resp. n_2 vrcholmi a m_1 resp. m_2 hranami. Platí $n_1 < n, n_2 < n$ a obidva grafy G_1, G_2 spĺňajú predpoklad (ii); podľa indukčného predpokladu teda $m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1$. Potom počet hrán G je
$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n - 1.$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Nech $G_0 = G$ je súvislý s n vrcholmi, počet jeho hrán je $m = n - 1$ a obsahuje $p > 0$ kružníc. Nech e_0 je hrana patriaca nejakej kružnici $C_0 \subseteq G_0$. Potom graf $G_1 = G - e_0$ je opäť súvislý (ak nejaký $x - y$ sled S obsahoval hranu e_0, tak každý výskyt e_0 v S možno nahradiť cestou $C_0 - e_0$, čím opäť vznikne $x - y$-sled), má n vrcholov, $m - 1$ hrán a menej kružníc, ako G (odobratím hrany zanikla aspoň jedna kružnica, konkrétne C_0). Tento postup možno opakovať: ak graf G_i obsahuje nejakú kružnicu C_i a e_i je jej hrana, tak graf $G_{i+1} = G_i - e_1$ je súvislý s n vrcholmi, $m - i$ hranami a s menším počtom kružníc, ako G_i. Po $k \leq p$ krokoch takto dostaneme súvislý graf G_k s n vrcholmi, $m - k$ hranami, ktorý neobsahuje žiadnu kružnicu. Podľa definície je teda G_k strom a vzhľadom na už dokázanú implikáciu (i) $\Rightarrow$ (iii) pre počet hrán G_k platí $m - k = n - 1$. Podľa (iii) pre graf G platí $m = n - 1$; po dosadení dostávame $n - 1 - k = n - 1$, z čoho $k = 0$. Teda $G_0 = G$ neobsahuje žiadnu kružnicu.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Nech G neobsahuje kružnicu a počet jeho hrán je $m = n - 1$. Postupujme úplnou matematickou indukciou podľa počtu vrcholov grafu. Nech $G_1, \ldots, G_k$ sú komponenty grafu G s $n_1, \ldots, n_k$ vrcholmi a $m_1, \ldots, m_k$ hranami. Žiaden z týchto komponentov neobsahuje kružnicu, zároveň každý z nich je súvislý, teda každý z nich je strom a pre počet jeho hrán platí (na základe (iii)) $m_i = n_i - 1$. Potom platí
$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$. Zároveň
$m = n - 1$, teda platí $k = 1$, čo znamená, že graf G je súvislý. Takto dostávame, že G je strom a (podľa (ii)) medzi ľubovoľnými jeho dvomi nesusednými vrcholmi u, v existuje jediná $u - v$-cesta. Táto cesta spolu s hranou uv v grafe $G + uv$ potom vytvára jedinú kružnicu.

(v) $\Rightarrow$ (i): podľa (v) máme, že G neobsahuje kružnicu. Ak by bol nesúvislý, tak existujú dva vrcholy u, v, ktoré nesúvisia (a teda nie sú ani susedné). Potom však pridanie hrany uv ku G nevytvorí kružnicu, čo je spor s (v). Teda G je súvislý a neobsahuje kružnicu, čo podľa definície znamená, že je strom.

Definícia

Kostra *grafu* $G = (V, E)$ *je taký faktorový podgraf* $T = (V, E')$, *ktorý je strom.*

Lema

Graf G *má kostru práve vtedy, keď je súvislý.*

Dôkaz: Ak G má kostru T, tak každé dva vrcholy G súvisia (T je súvislá a obsahuje všetky vrcholy G). Obrátene, nech G je súvislý; použijeme matematickú indukciu podľa počtu k kružníc grafu. Ak $k = 0$, tak G je strom (a teda aj kostra); inak existuje hrana e patriaca nejakej kružnici v G. Graf $G - e$ je súvislý a má menej kružníc, ako G, teda $G - e$ obsahuje kostru T, ktorá je súčasne aj kostrou G.

Minimálna kostra

Definícia

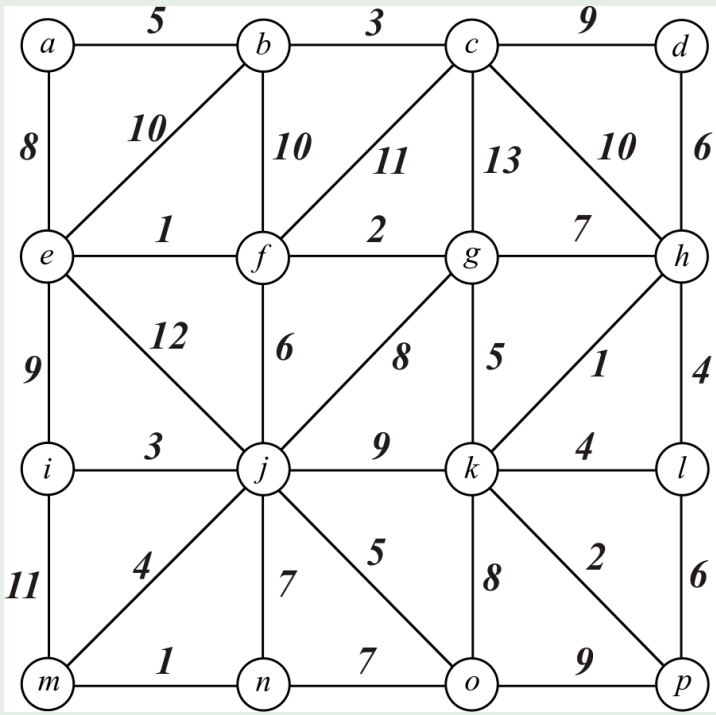
Nech $G = (V, E, w)$ *je súvislý ohodnotený graf s ohodnotením hrán* $w: E \to \mathbb{R}^+$. Minimálna kostra *grafu* G *je taká jeho kostra* T*, že súčet* $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$ *je minimálny.*

Algoritmus na získanie minimálnej kostry (Kruskal)

VSTUP: ohodnotený graf $G = (V, E, w)$
VÝSTUP: množina hrán minimálnej kostry G

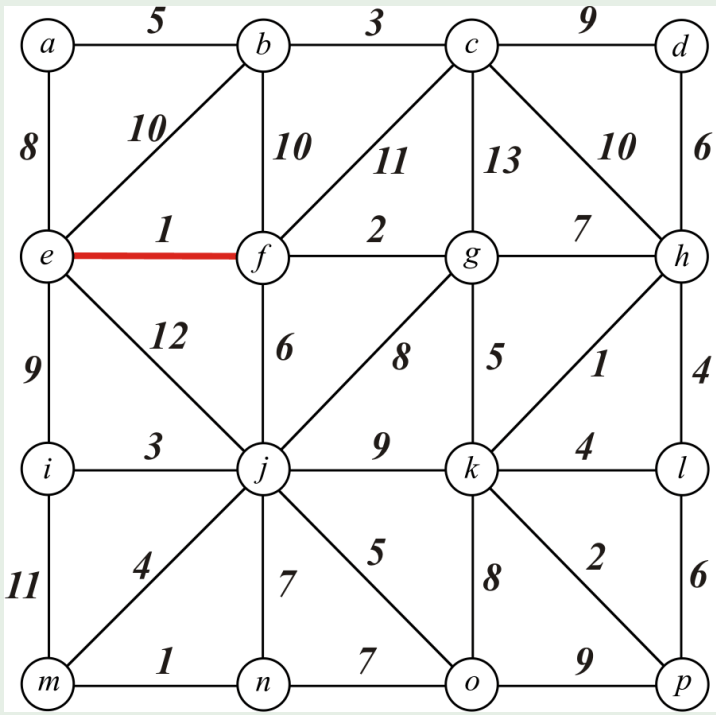
zotrieď(E,vzostupne)
$T' := \emptyset$
$i := 0$
pokiaľ ($|E_i| < |V| - 1$) opakuj
    $i := i + 1$
    ak (NeexistujeKružnica($(V, T' \cup \{e_i\})$)) tak
        $T' := T' \cup \{e_i\}$

Príklad



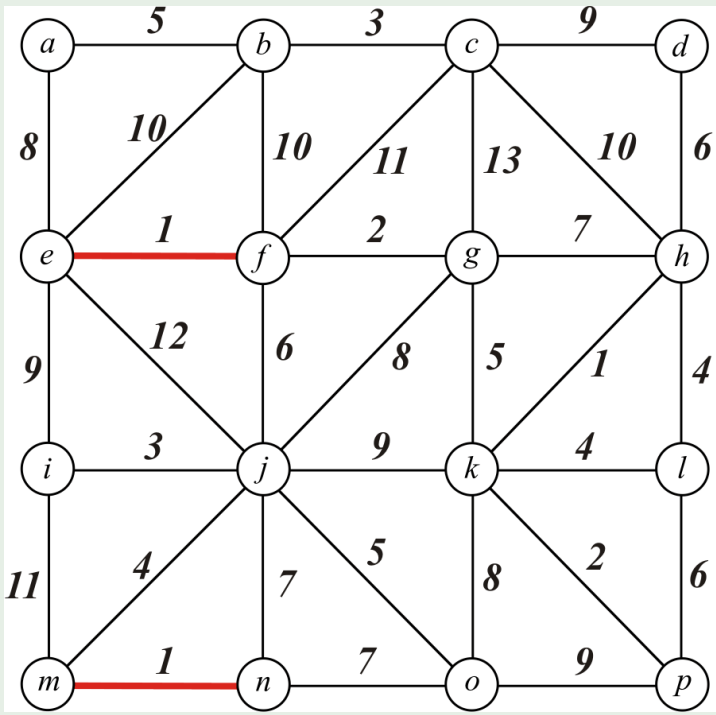
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



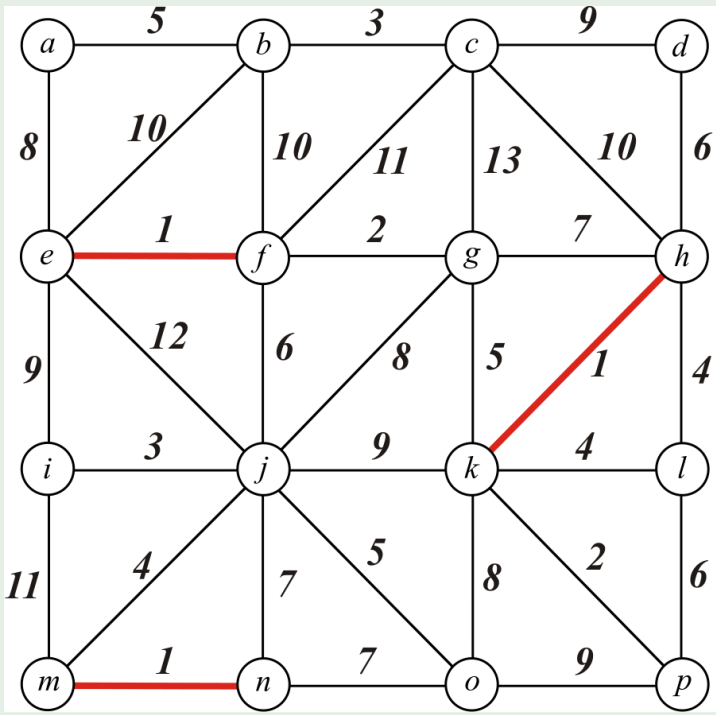
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*	*3*	*4*	*4*	*4*	*5*	*5*
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	*6*	*6*	*6*	*7*	*7*	*7*	*8*	*8*	*8*	*9*	*9*
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	*9*	*10*	*10*	*10*	*11*	*11*	*12*	*13*			

Príklad



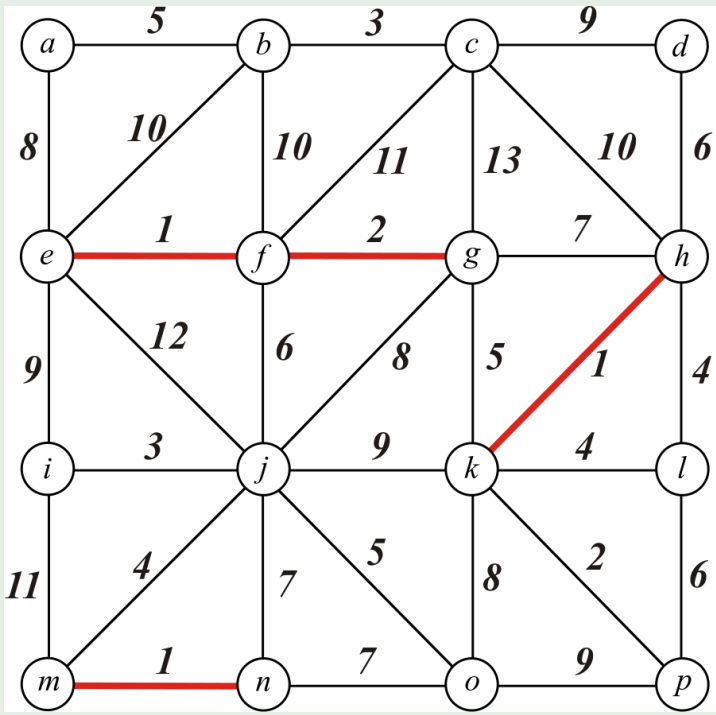
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



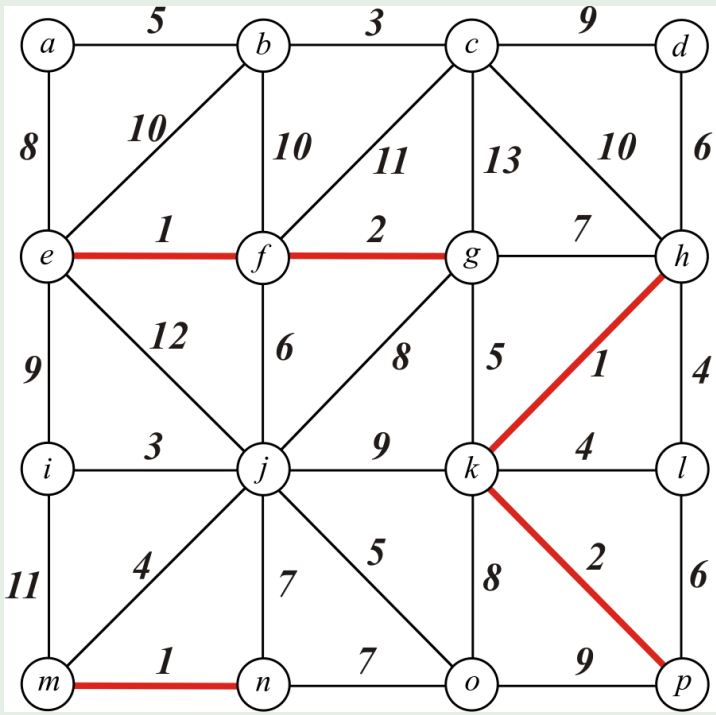
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



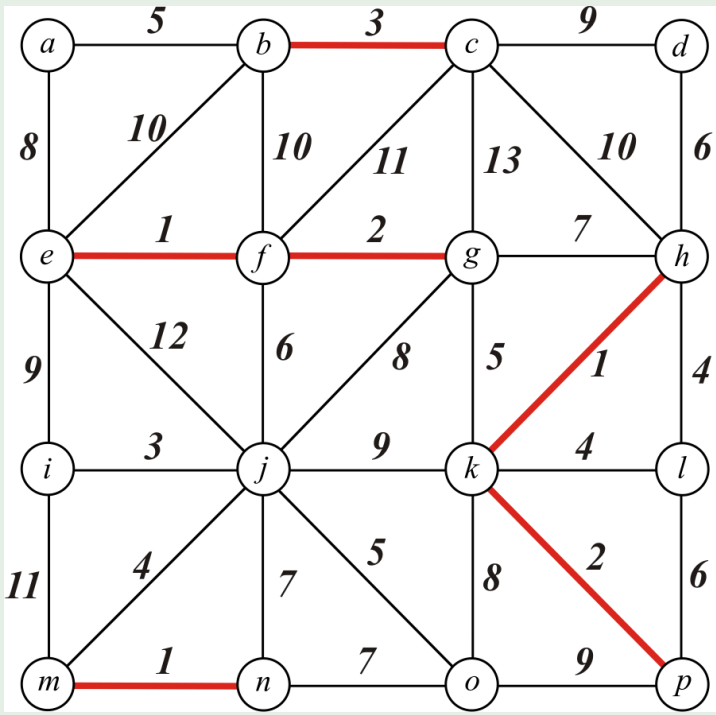
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



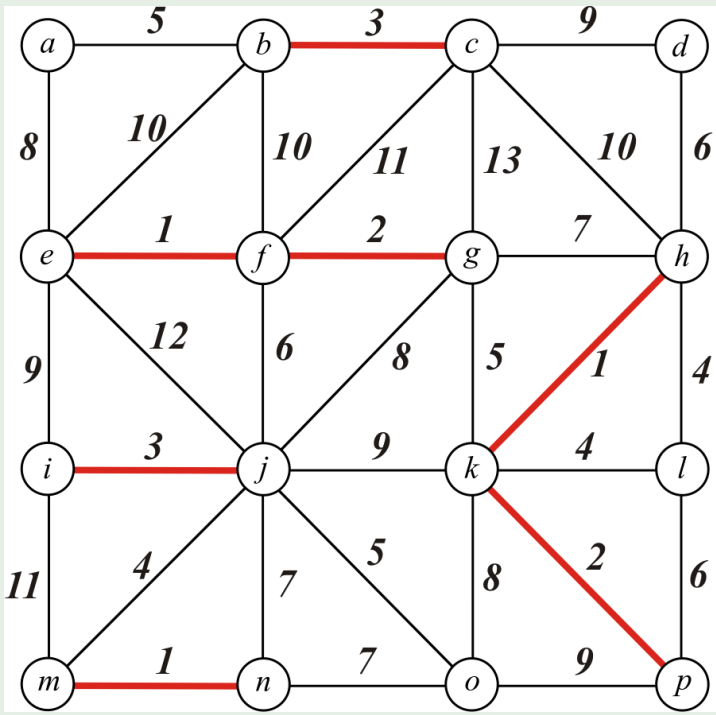
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



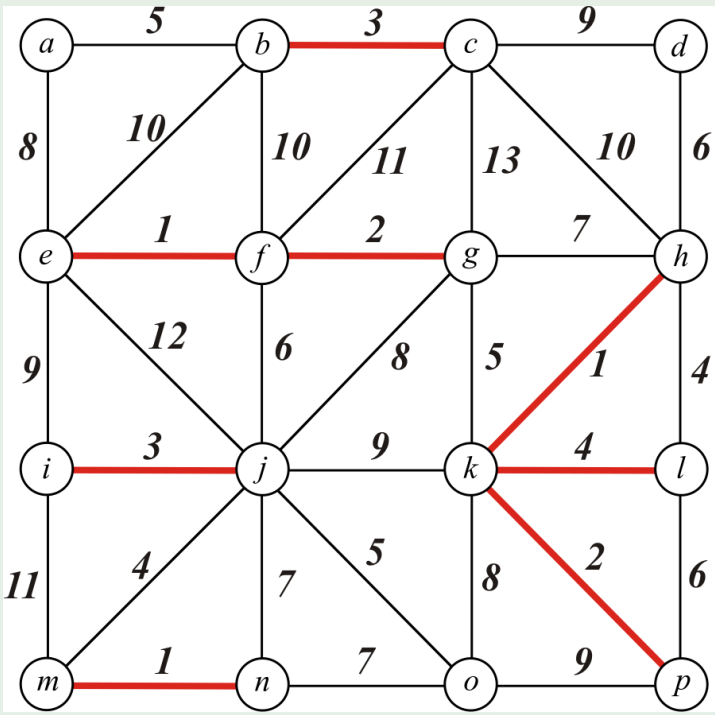
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



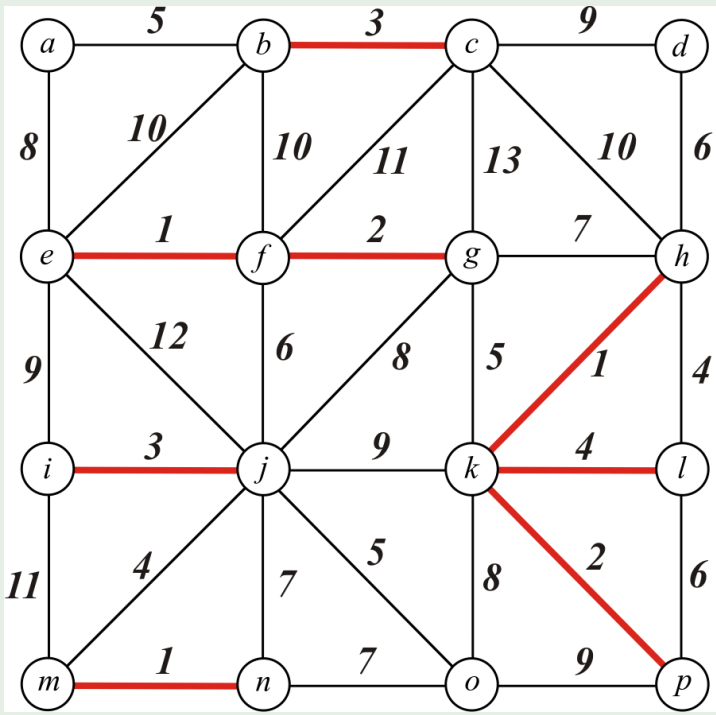
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



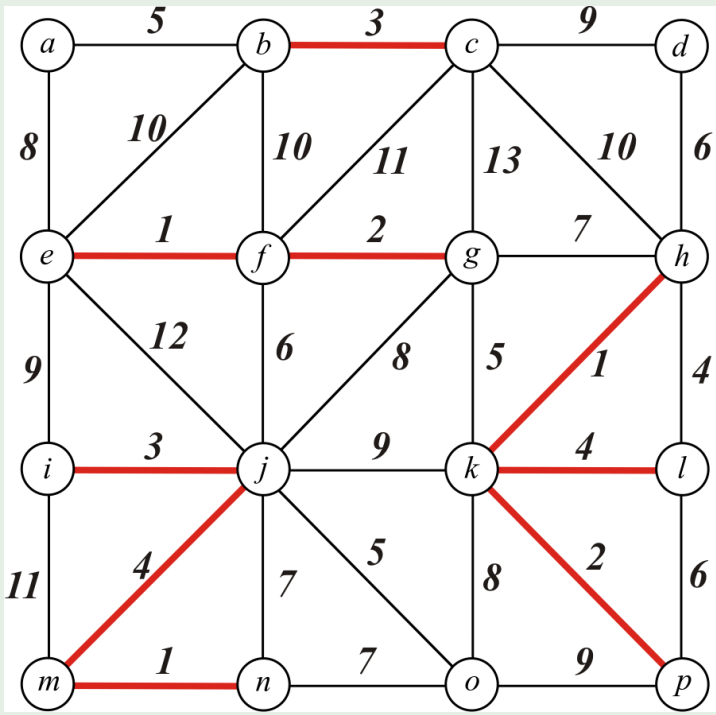
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



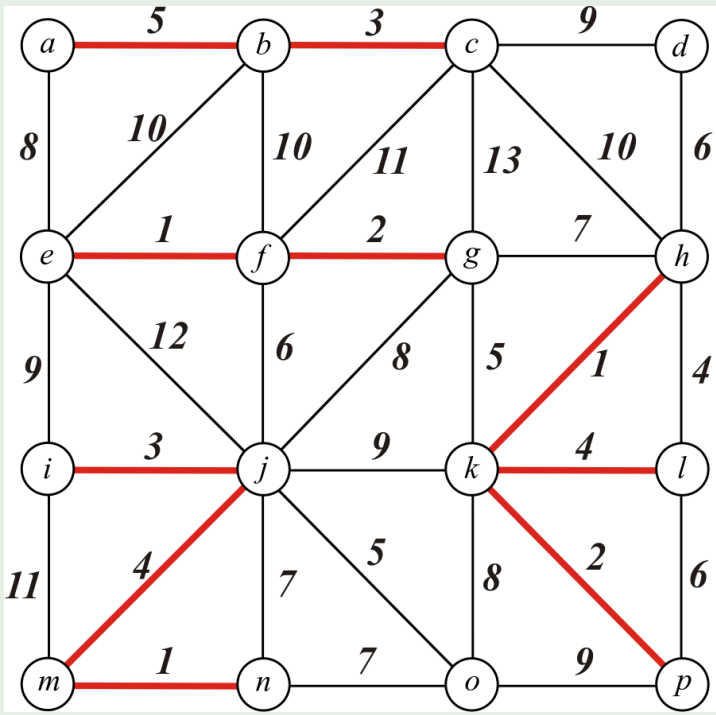
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



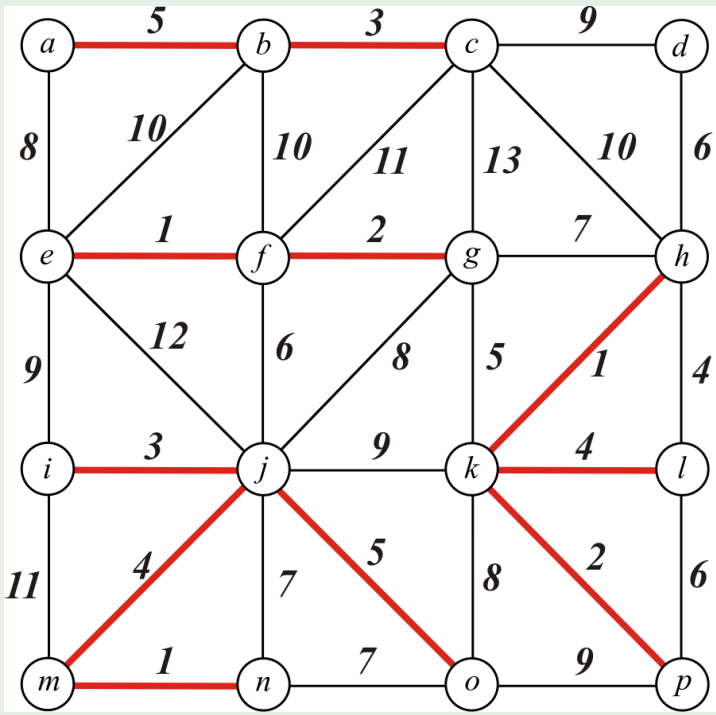
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



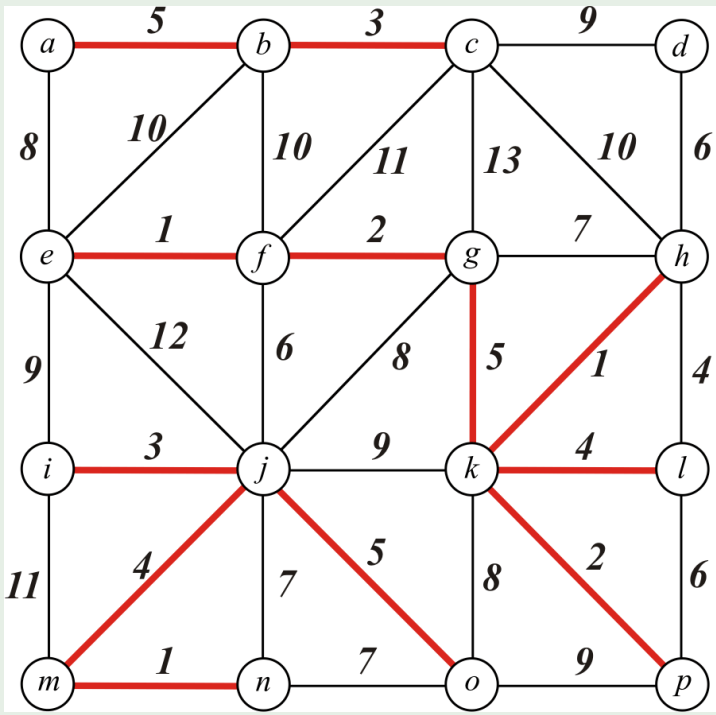
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



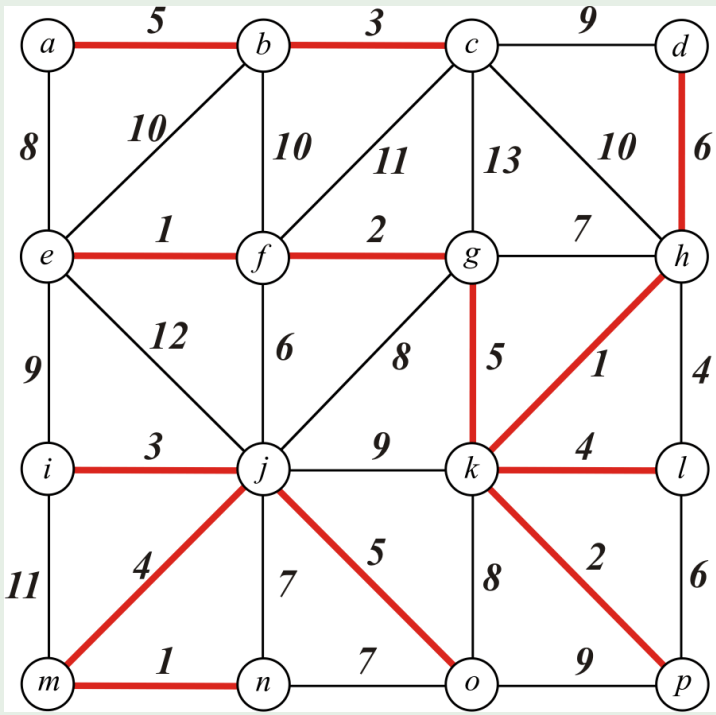
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



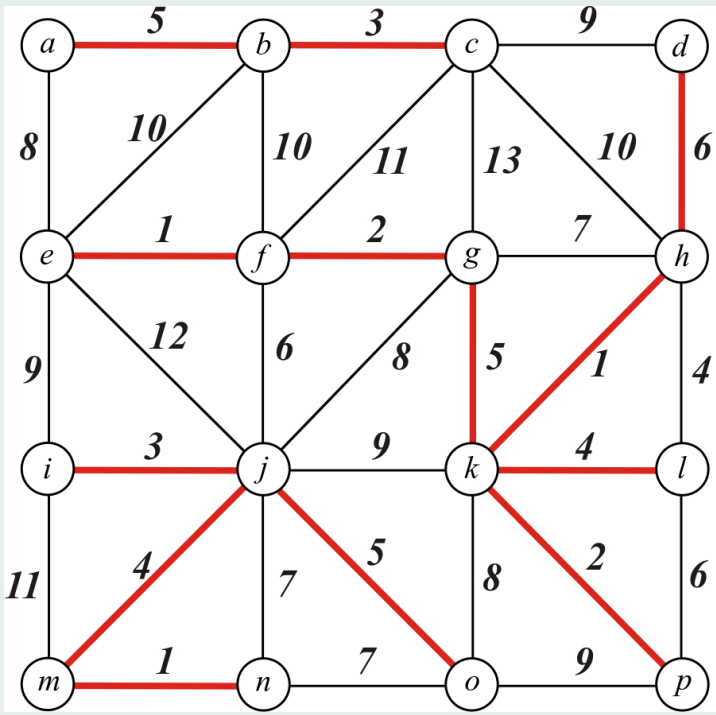
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



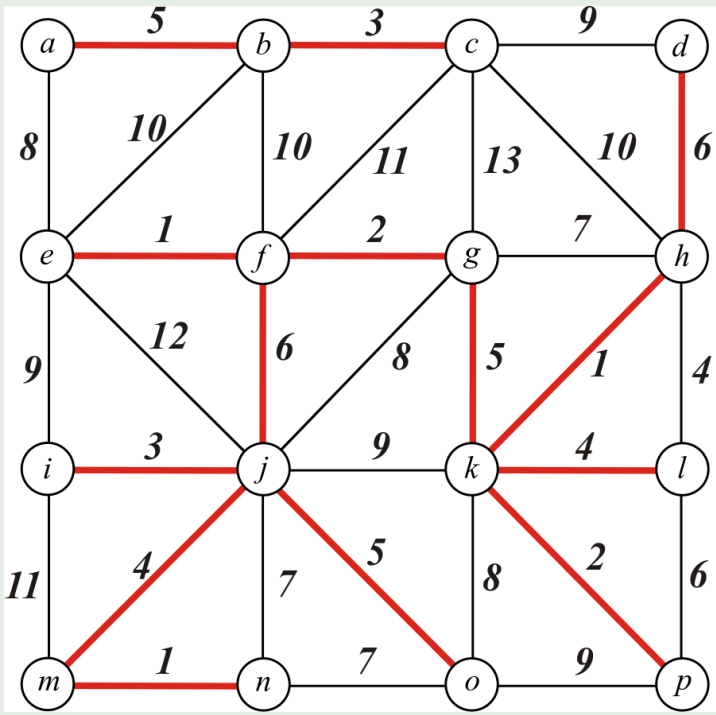
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



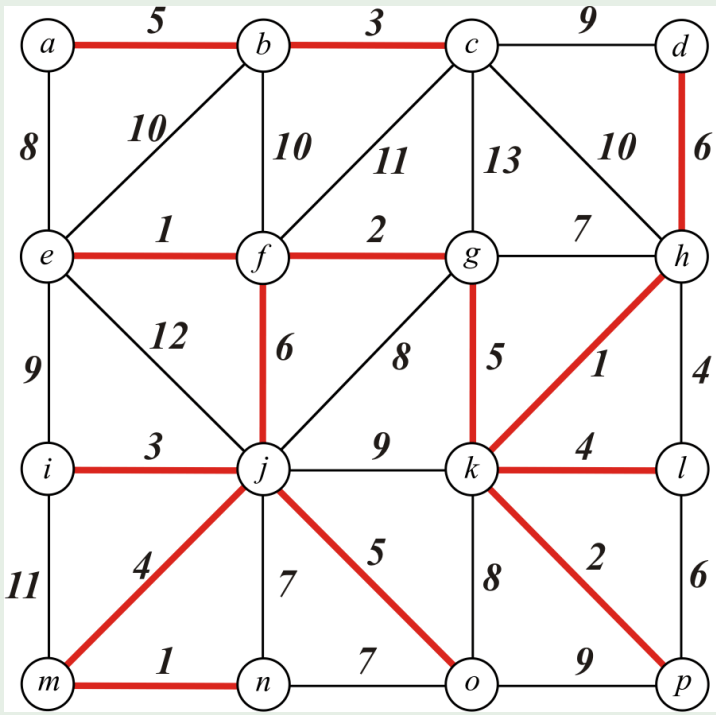
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



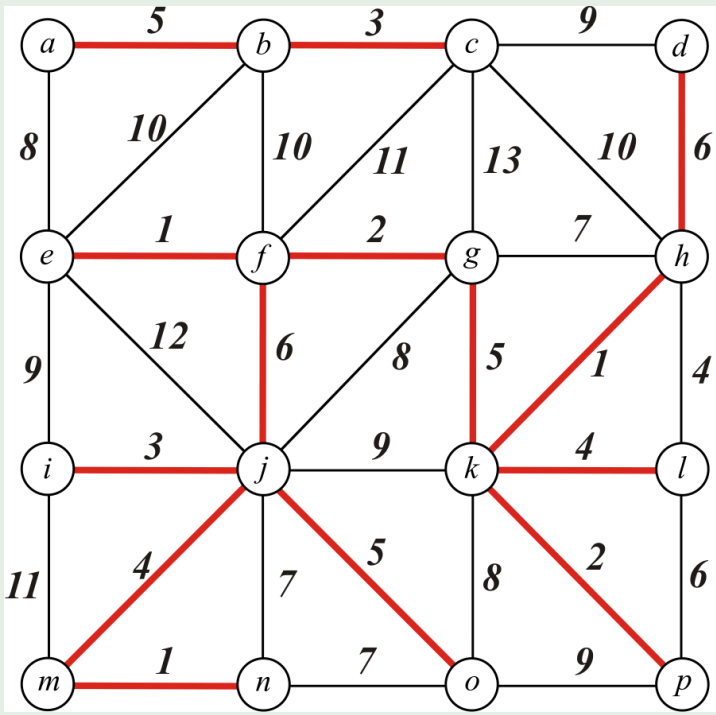
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



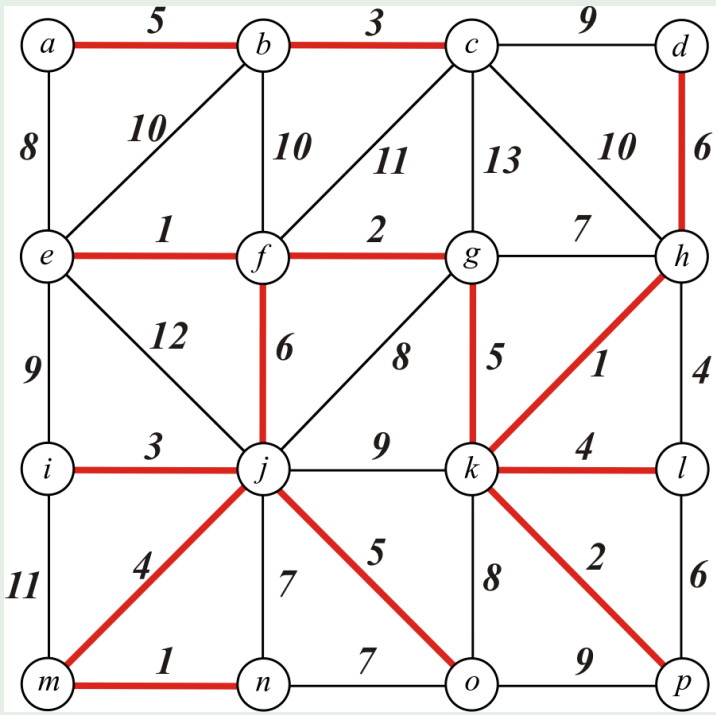
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



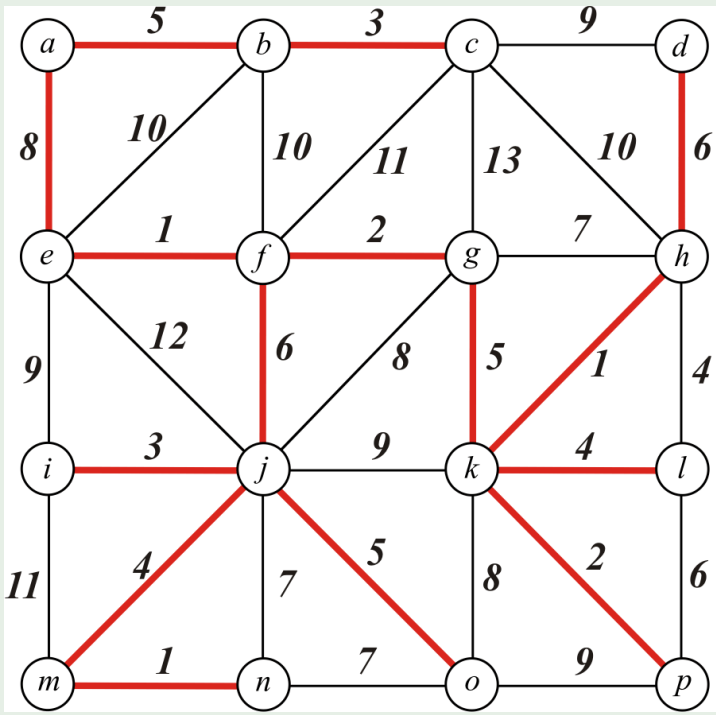
ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

Príklad



ef	*mn*	*hk*	*fg*	*kp*	*bc*	*ij*	*kl*	*hl*	*jm*	*ab*	*jo*
1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5
gk	*dh*	*lp*	*fj*	*jn*	*no*	*gh*	*ae*	*ko*	*gj*	*ei*	*cd*
5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9
op	*jk*	*be*	*bf*	*ch*	*cf*	*im*	*ej*	*cg*			
9	9	10	10	10	11	11	12	13			

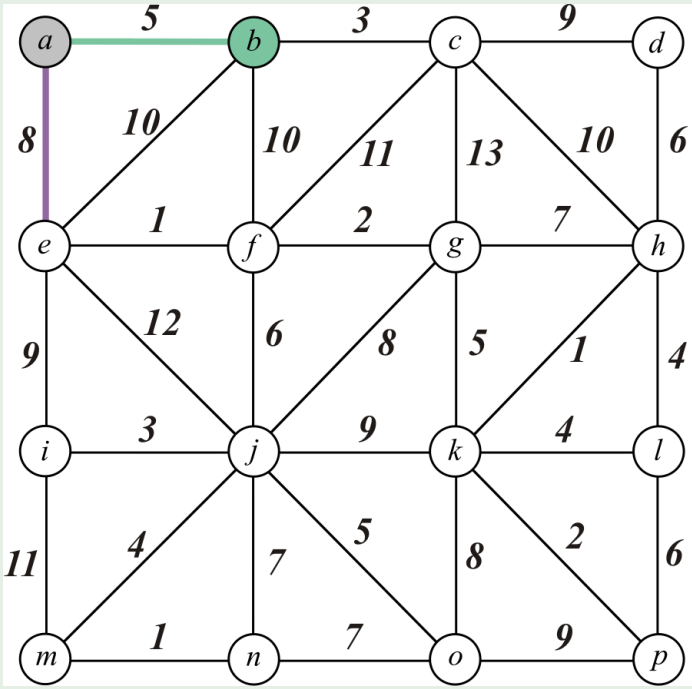
Dôkaz korektnosti algoritmu: Nech T je minimálna kostra ohodnoteného grafu G a nech T' je kostra získaná Kruskalovým algoritmom. Nech $e_1, \ldots, e_{n-1}$ sú hrany T' v poradí podľa vzrastajúcej hodnoty. Predpokladajme, že $T \neq T'$; potom nech e_i je prvá hrana T' nevyskytujúca sa v T. Uvažujme graf $T + e_i$. Tento graf obsahuje práve jednu kružnicu C, v ktorej existuje hrana $b \notin E(T')$. Graf $T_1 = (T + e_i) - b$ je potom kostra G (neobsahuje kružnice a má rovako veľa hrán, ako T) a platí (vzhľadom na minimalitu T) $w(T_1) \geq w(T) = w(T) + w(e_i) - w(b)$. Z toho dostávame $w(e_i) \geq w(b)$. Ak by však táto nerovnosť bola ostrá, tak v priebehu vykonávania algoritmu by sme museli vybrať v kroku, kde sa vyberala hrana e_i namiesto nej hranu b, čo je spor. Teda $w(e_i) = w(b)$. Pre graf $T_1 = T + e_i - b$ potom platí, že $w(T_1) = w(T)$ a T_1 má s kostrou T' viacej spoločných hrán, ako T. Opakovaním tohto postupu získame kostru $T_k = T'$, pre ktorú (vzhľadom na zachovávanie celkovej váhy pri každej výmene hrán) $w(T) = w(T_1) = \cdots = w(T_k) = w(T')$.

Algoritmus na získanie minimálnej kostry (Prim/Jarník)

VSTUP: ohodnotený graf $G = (V, E, w)$, vrchol $v_1 \in V$
VÝSTUP: množiny V', E' vrcholov a hrán minimálnej kostry G

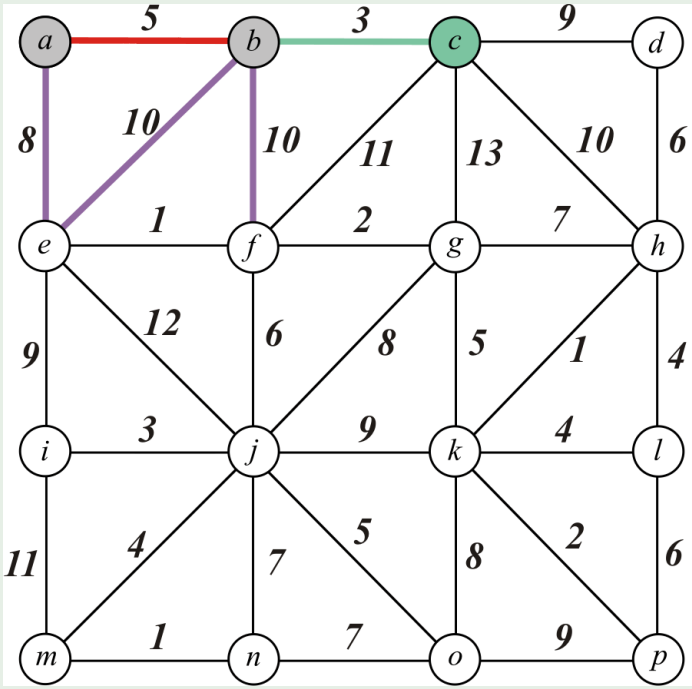
$V' := \{v_1\}$
$E' := \emptyset$
pre každé $(i = 1..|V| - 1)$ opakuj
vyber $xy \in E : \ x \in V', y \in V \setminus V', w(xy)$ je minimálna
$V' := V' \cup \{y\}$
$E' := E' \cup \{xy\}$

Príklad



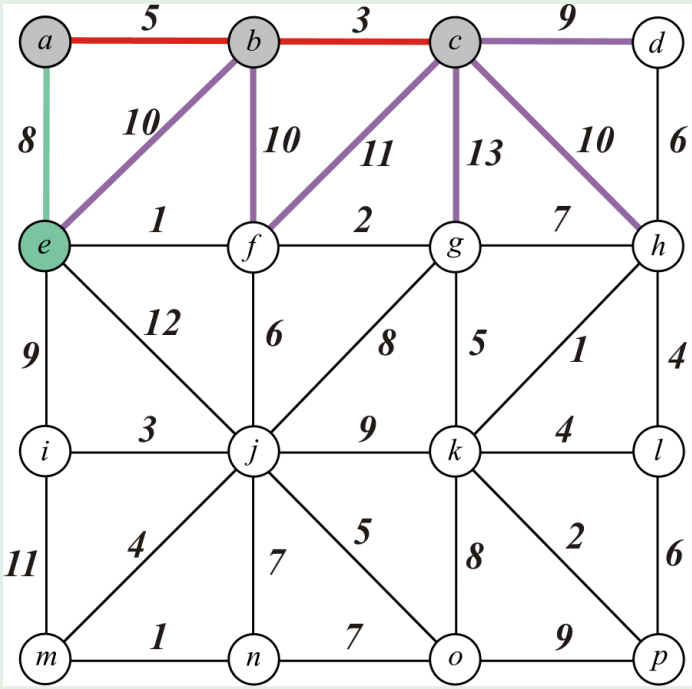
V': $\{a\}$
E': $\emptyset$
hrany na rozhodnutie: ab, ae
pridávaný vrchol: b
pridávaná hrana: ab

Príklad



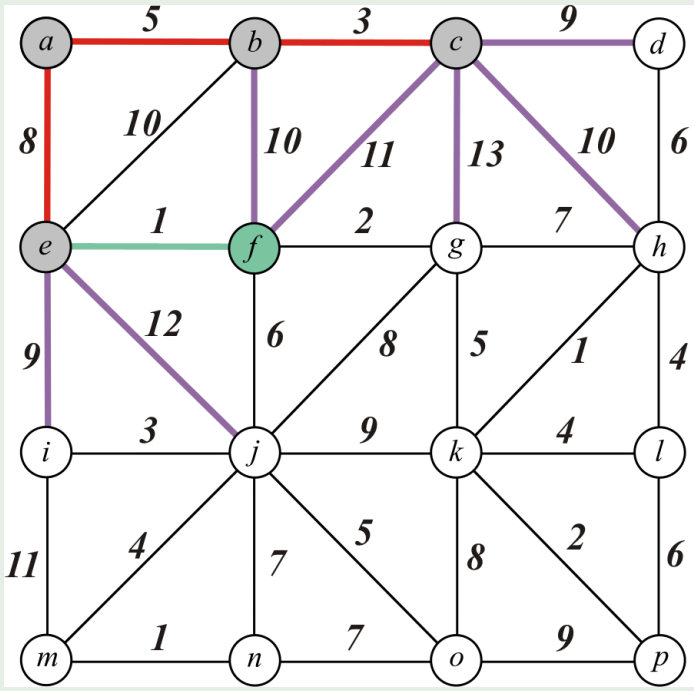
V': {a, b}
E': {ab}
hrany na rozhodnutie: ae, be, bf, bc
pridávaný vrchol: c
pridávaná hrana: bc

Príklad



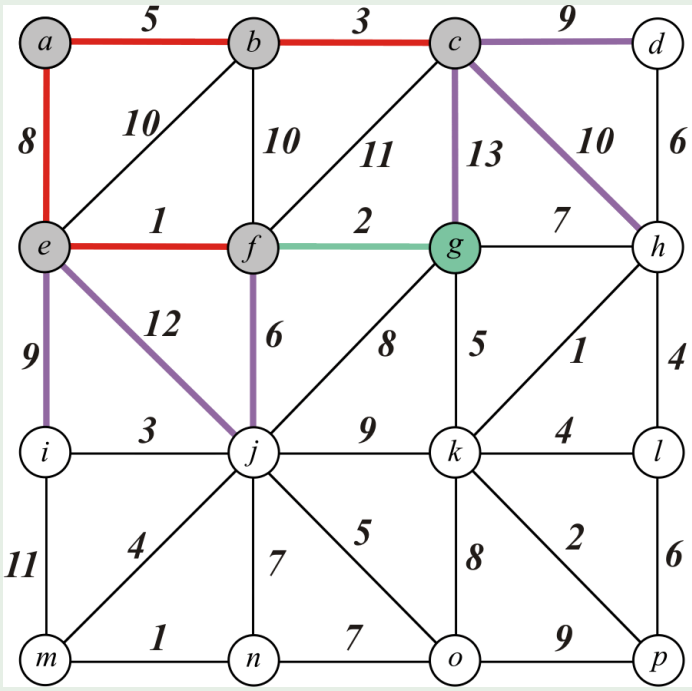
V': {a, b, c}
E': {ab, bc}
hrany na rozhodnutie: ae, be, bf, cf, cg, ch, cd
pridávaný vrchol: e
pridávaná hrana: ae

Príklad



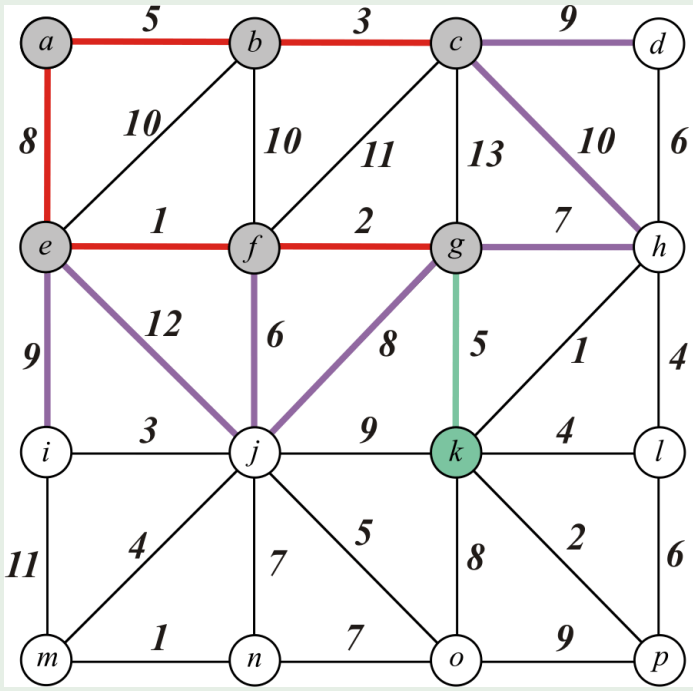
V': {a, b, c, e}
E': {ab, bc, ae}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, ef, bf, cf, cg, ch, cd
pridávaný vrchol: f
pridávaná hrana: ef

Príklad



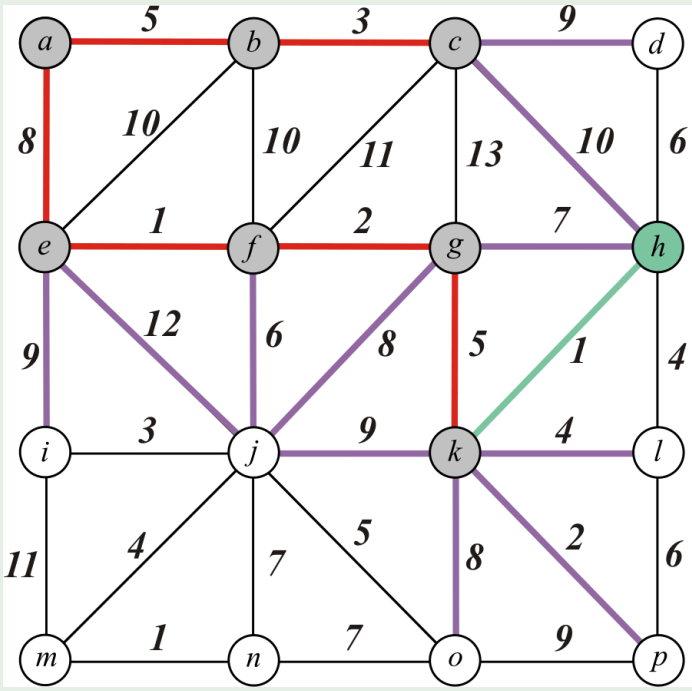
V': {a, b, c, e, f}
E': {ab, bc, ae, ef}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, fg, cg, ch, cd
pridávaný vrchol: g
pridávaná hrana: fg

Príklad



V': {a, b, c, e, f, g}
E': {ab, bc, ae, ef, fg}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, gk, gh, ch, cd
pridávaný vrchol: k
pridávaná hrana: gk

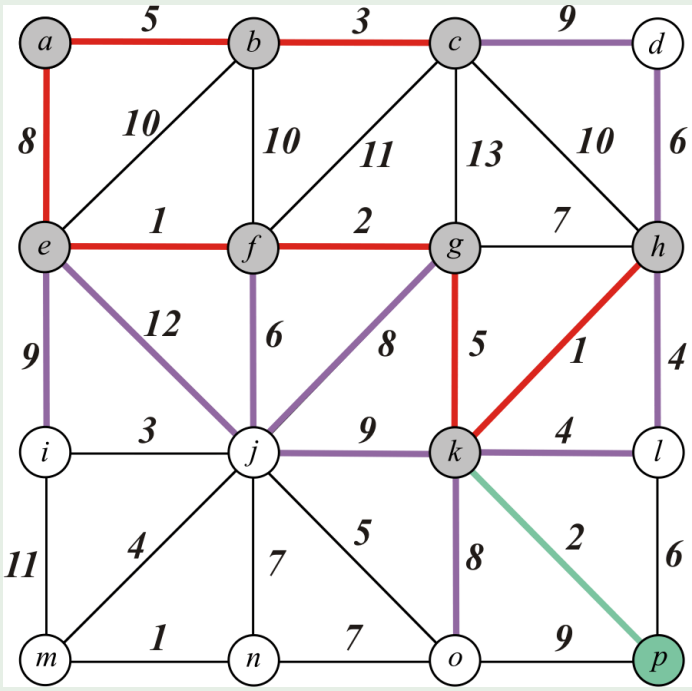
Príklad



V': {a, b, c, e, f, g, k}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, kj, ko, kp, kl, kh, gh, ch, cd

pridávaný vrchol: h
pridávaná hrana: kh

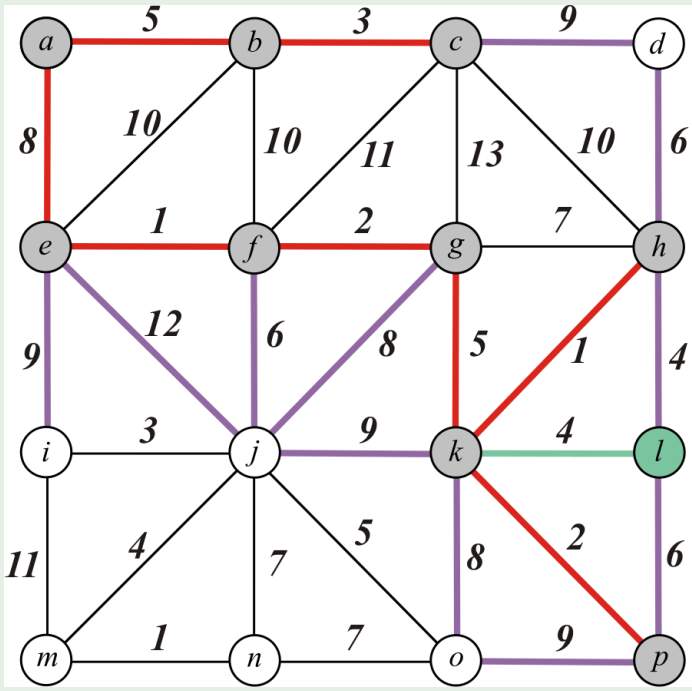
Príklad



V': {a, b, c, e, f, g, k, h}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, kj, ko, kp, kl, hl, hd, cd

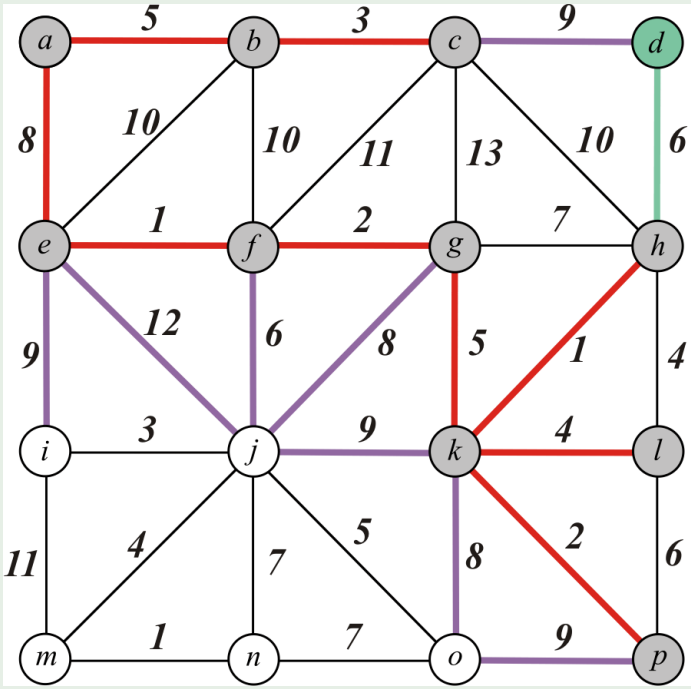
pridávaný vrchol: p
pridávaná hrana: kp

Príklad



V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, kj, ko, po, pl, kl, hl, hd, cd
pridávaný vrchol: l
pridávaná hrana: kl

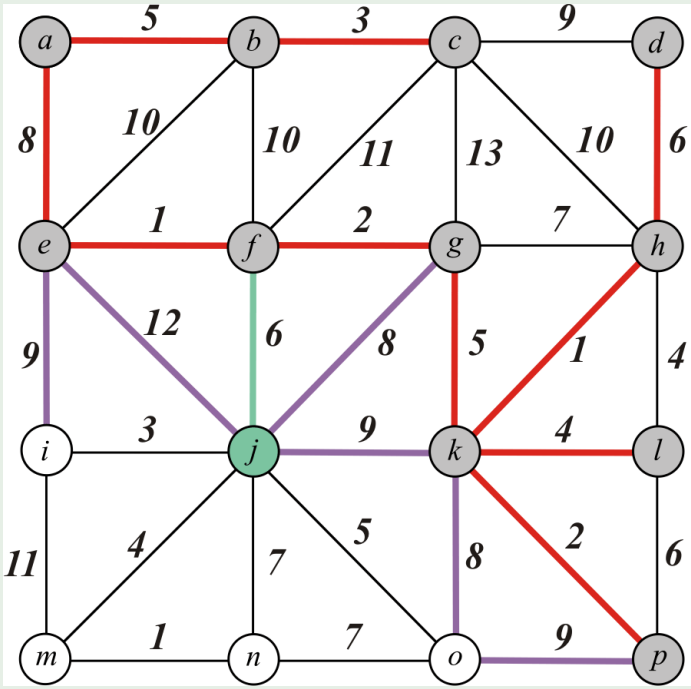
Príklad



V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, kj, ko, po hd, cd

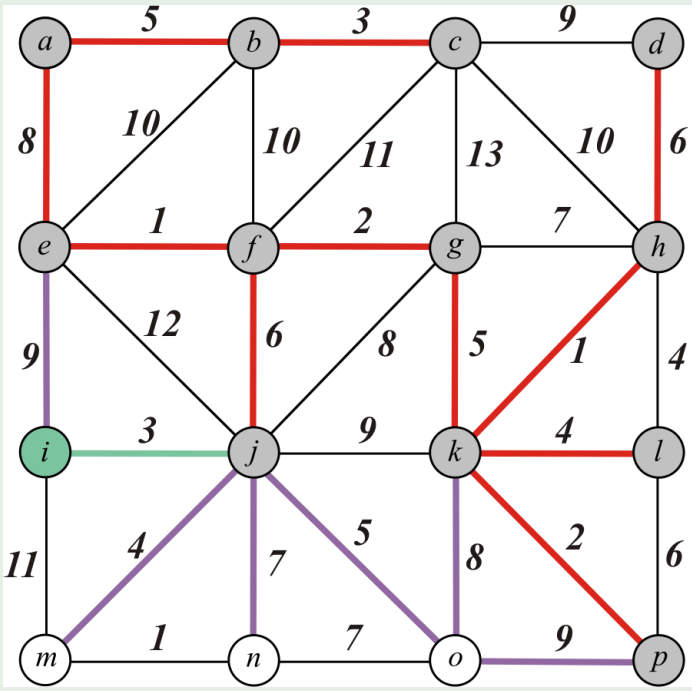
pridávaný vrchol: d
pridávaná hrana: hd

Príklad



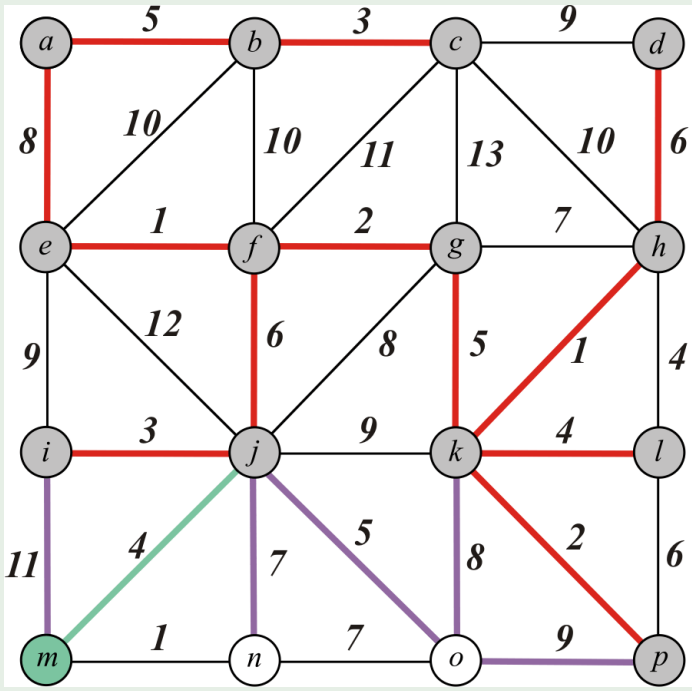
V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd}
hrany na rozhodnutie: ei, ej, fj, gj, kj, ko, po
pridávaný vrchol: j
pridávaná hrana: fj

Príklad



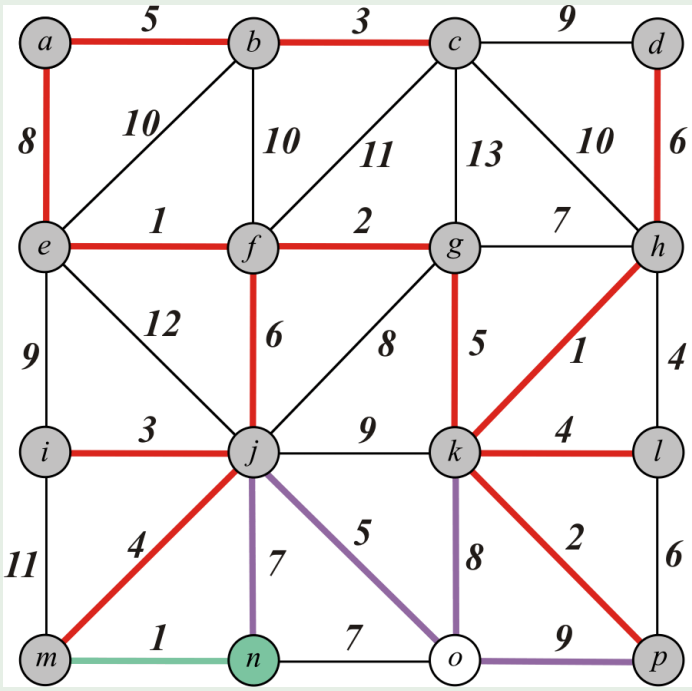
V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d, j}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd, fj}
hrany na rozhodnutie: ei, ji, jm, jn, jo, ko, po
pridávaný vrchol: i
pridávaná hrana: ji

Príklad



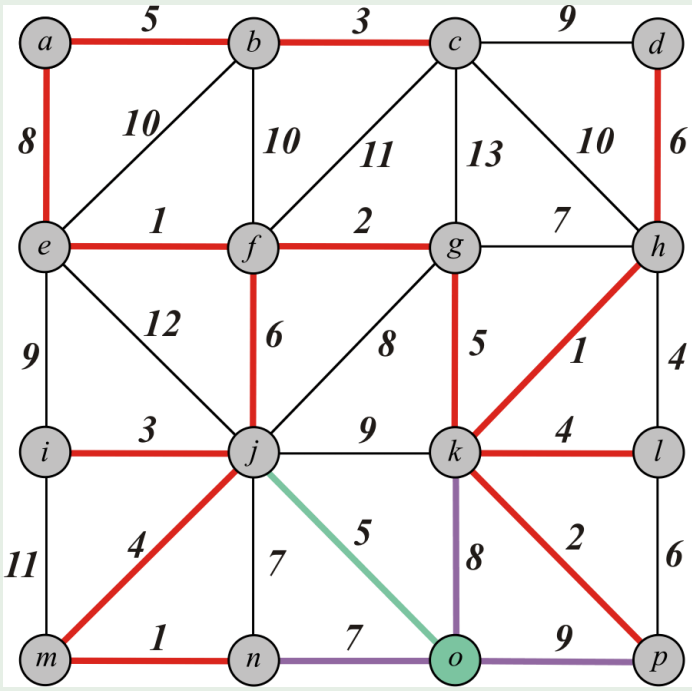
V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d, j, i}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd, fj, ji}
hrany na rozhodnutie: im, jm, jn, jo, ko, po
pridávaný vrchol: m
pridávaná hrana: jm

Príklad



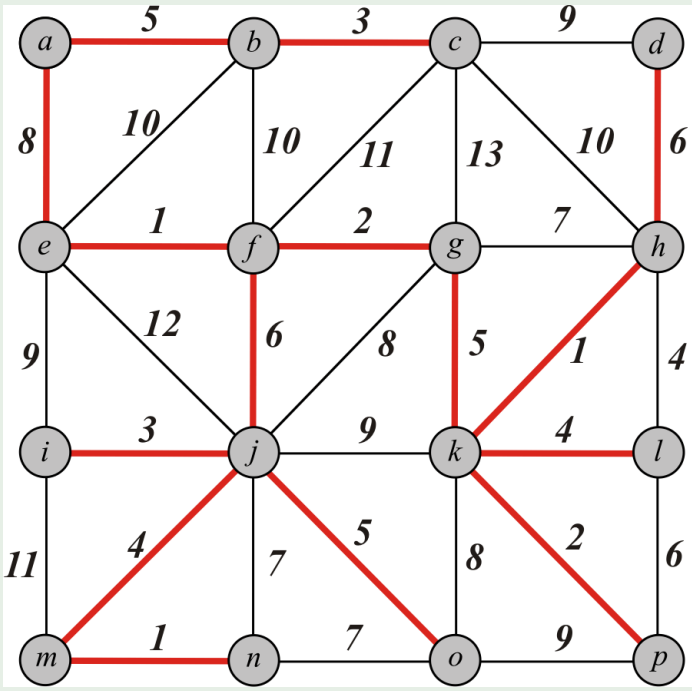
V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d, j, i, m }
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd, fj, ji, jm}
hrany na rozhodnutie: mn, jn, jo, ko, po
pridávaný vrchol: n
pridávaná hrana: mn

Príklad



V': {a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d, j, i, n, m}
E': {ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd, fj, ji, jm, mn}
hrany na rozhodnutie: no, jo, ko, po
pridávaný vrchol: o
pridávaná hrana: jo

Príklad



V': {*a, b, c, e, f, g, k, h, p, l, d, j, i, n, m, o* }
E': {*ab, bc, ae, ef, fg, gk, kh, kp, kl, hd, fj, ji, jm, mn, jo*}

Dôkaz korektnosti algoritmu: Nech T' je kostra získaná Primovým/Jarníkovým algoritmom. Nech $e_1, \ldots, e_{n-1}$ sú hrany T' v poradí, v akom boli algoritmom pridávané. Predpokladajme, že T' nie je minimálna kostra G.

Nech T je nejaká minimálna kostra G a nech $k(T)$ je číslo k také, že hrany $e_1, \ldots, e_k$ patria T, ale $e_{k+1} \notin E(T)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech T je taká minimálna kostra, pre ktorú je $k(T)$ najväčšie možné.

Nech $T_k = (V_k, E_k)$ je strom tvorený hranami $e_1, \ldots, e_k$. Potom $e_{k+1} = xy, x \in V(T_k), y \notin V(T_k)$. Graf $T + e_{k+1}$ je súvislý a má viac ako $|V| - 1$ hrán, teda obsahuje nejakú kružnicu C a $e_{k+1} \in E(C)$. Súčasťou C je - okrem hrany xy - aj nejaká $x - y$-cesta P v kostre T. Ďalej, keďže $x \in V_k, y \notin V_k$, aspoň jedna hrana e cesty P má jeden koncový vrchol z V_k a druhý mimo V_k. Zrejme $e \neq e_{k+1}, e \in e(T), e_{k+1} \notin E(T)$. Podľa pravidiel fungovania algoritmu potom $w(e_{k+1}) \leq w(e)$.

Uvažujme graf $\widehat{T} = (T + e_{k+1}) - e$. Tento graf je súvislý a má $|V| - 1$ hrán, je to teda kostra G. Súčasne $w(\widehat{T}) = w(T) - w(e) + w(e_{k+1}) \leq w(T)$, teda $\widehat{T}$ je opäť minimálna kostra G. Avšak $k(\widehat{T}) > k(T)$, čo je spor.