Úvod do teórie grafov

Označenie: pre danú konečnú množinu V a $k \in \mathbb{N}$ je $\binom{V}{k}$ množina všetkých k-prvkových podmnožín V.

Definícia

Graf *je usporiadaná dvojica* (V, E), *kde* V *je množina a* $E \subseteq \binom{V}{2}$.

V ďalšom budeme uvažovať iba konečné grafy (s konečnou množinou V).

Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy*, prvky E sa nazývajú *hrany* grafu G.

Z definície grafu vyplýva, že dva vrcholy vytvárajú maximálne jednu hranu. Ak v definícii pripustíme, aby sa určité dvojprvkové podmnožiny V vyskytli v E "viackrát", tak dostaneme štruktúru nazývanú *multigraf* (hrany s násobným výskytom sa nazývajú *multihrany*).

Definícia

Multigraf *je usporiadaná dvojica* (V, E)*, kde* V *je množina a* E *je multimnožina, ktorej prvky sú z* $\binom{V}{2}$.

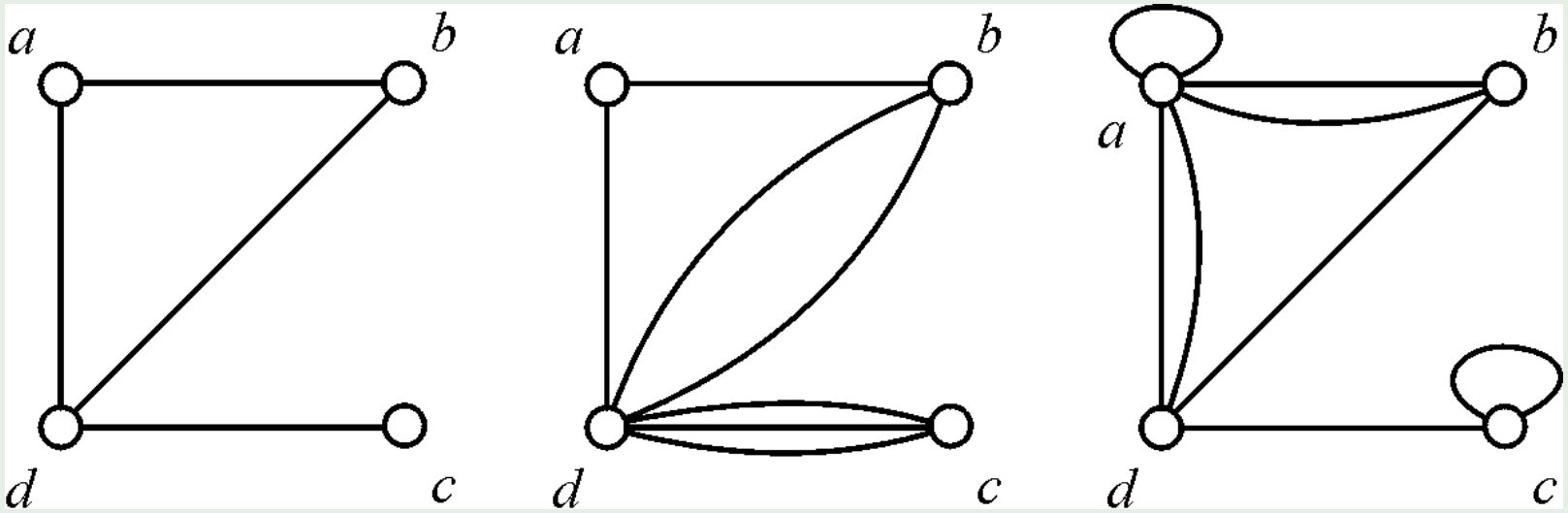
V pôvodnej definícii grafu tiež nie je dovolená existencia hrany $\{u, v\}$ pre $u = v$ (tzv. *slučka*). Štruktúra pripúšťajúca multihrany a slučky sa nazýva *pseudograf*.

Definícia

Pseudograf *je usporiadaná dvojica* (V, E)*, kde* V *je množina a* E *je multimnožina, ktorej prvky sú z* $\binom{V}{2} \cup V$.

Príklad

Graf, multigraf a pseudograf s množinou vrcholov $\{a, b, c, d\}$



Definícia

Ohodnotený graf (sieť) *je usporiadaná trojica* (V, E, w) *taká, že* (V, E) *je graf a* $w: E \to \mathbb{R}$ *je ohodnotenie hrán.*

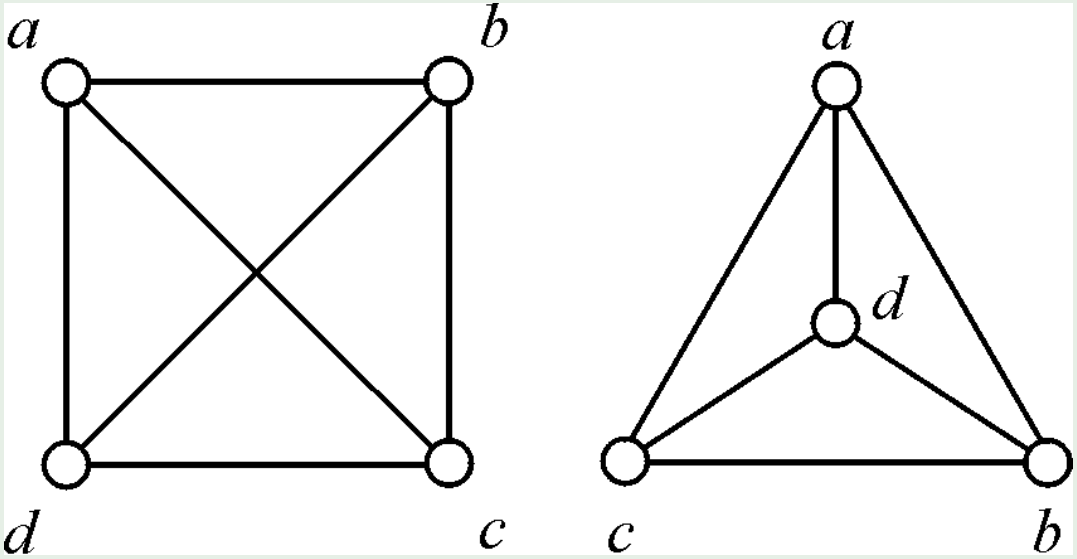
Definícia

Nakreslenie (diagram) *grafu* $G = (V, E)$ *je reprezentácia* G *v rovine taká, že každému vrcholu* $v_i \in V$ *je priradený bod* B_i *roviny a každej hrane* $e = v_i v_j$ *oblúk* $o(e) = \widehat{B_i B_j}$ *spájajúci body* B_i *a* B_j *; pritom sa požaduje, aby body priradené rôznym vrcholom boli rôzne, oblúky sami seba nepretínali a okrem koncových bodov neobsahovali žiaden ďalší bod prislúchajúci niektorému z vrcholov* G.

V nakreslení grafu je dovolené, aby sa dva rôzne oblúky pretínali (t.j. mali spoločný vnútorný bod).

Príklad

Dve rôzne nakreslenia toho istého grafu $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{ab, bc, cd, ad, bd, cd\}$.



V prvom nakreslení existuje dvojica pretínajúcich sa oblúkov (ac, bd), v druhom sa žiadne dva oblúky nepretínajú.

Hranu $e \in E$ tvorenú vrcholmi v_i, v_j označujeme $e = \{v_i, v_j\}$ alebo $e = v_i v_j$. Vrcholy v_i, v_j sa potom nazývajú *koncové vrcholy* hrany e; v tomto prípade sa v_i, v_j nazývajú *susedné* a hovoríme, že vrchol v_i (resp. v_j) *inciduje* s hranou e (je incidentný s e). Dve hrany sa nazývajú *susedné*, ak majú spoločný vrchol.

Definícia

Stupeň *vrchola* v *v grafe* G *je počet hrán incidentných s* v*; označuje sa* $\deg_G(v)$ *alebo* $\deg(v)$.

Vrchol stupňa 0 sa nazýva *izolovaný*, vrchol stupňa 1 sa nazýva *visiaci*.
$\delta(G)$ označuje minimálny a $\Delta(G)$ maximálny spomedzi všetkých stupňov vrcholov grafu G.

Veta

Ak počet hrán grafu G je m, tak súčet stupňov všetkých jeho vrcholov je rovný $2m$.

Dôkaz: ak vezmeme súčet všetkých stupňov vrcholov grafu, tak každá hrana je v ňom započítaná dvakrát (pri stupňoch oboch jej koncových vrcholov).

Dôsledok

V každom konečnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.

Definícia

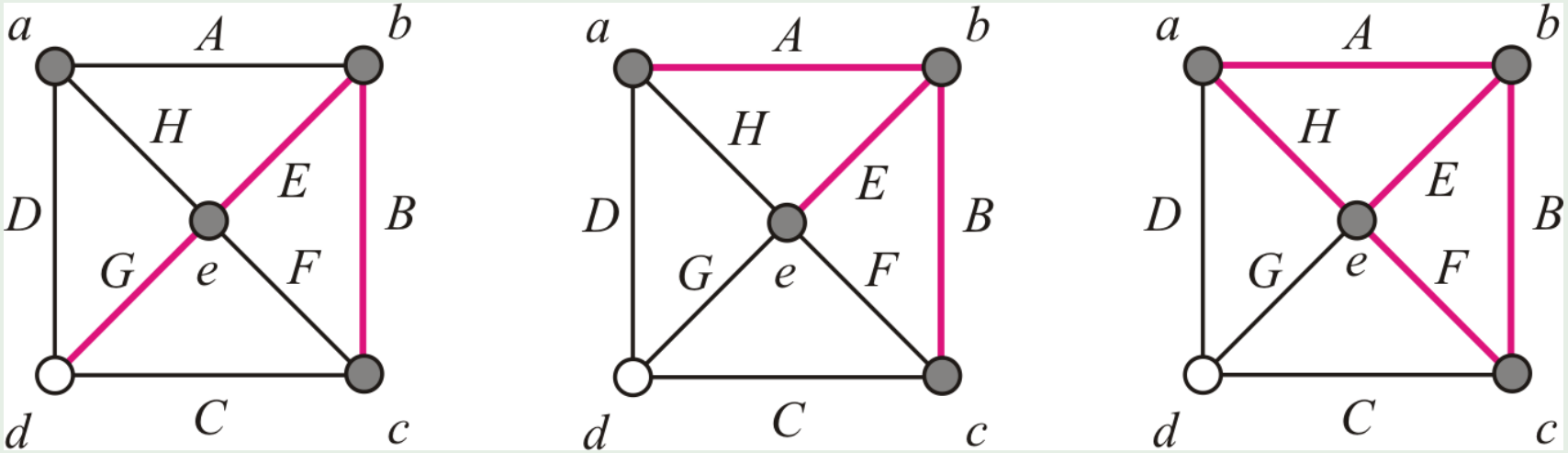
Graf $G' = (V', E')$ *je* podgraf *grafu* $G = (V, E)$, *ak* $V' \subseteq V$ *a* $E' \subseteq E$. G' *sa nazýva* vlastný podgraf G, *ak* $V' \subsetneq V$ *alebo* $E' \subsetneq E$. G' *sa nazýva* faktorový podgraf G, *ak* $V' = V$.

Definícia

Graf $G' = (V', E')$ *je* indukovaný podgraf *grafu* $G = (V, E)$, *ak* $V' \subseteq V$ *a* G' *obsahuje všetky hrany, ktoré spájajú vrcholy z* V' *v grafe* G; *označujeme* $\langle V \rangle_G$ *resp.* $\langle V \rangle$ *alebo* $G[V']$.

Príklad

Nech $G = (V, E), V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ a nech $V_1 = \{a, b, c, e\}, E_1 = \{A, B, E\}, E_2 = \{A, B, E, F, H\}$, $E_3 = \{E, B, G\}$.



(V_1, E_3) nie je podgrafom G. $G_1 = (V_1, E_1)$ je podgrafom G, ale nie je jeho indukovaným podgrafom. $G_2 = (V_1, E_2)$ je indukovaný podgraf G.

Definícia

Nech v je vrchol grafu $G = (V, E)$. Potom graf $G - v = \langle V \setminus \{v\} \rangle$ je graf získaný z G odobratím vrchola v *a všetkých hrán incidentných s v.*

Definícia

Nech e je hrana grafu $G = (V, E)$. Potom graf $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ je graf získaný z G odobratím hrany e.

Definícia

Graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$ je komplement *grafu $G = (V, E)$, ak pre všetky $v_i, v_j \in V$ je $v_i v_j \in \overline{E}$ práve vtedy, keď $v_i v_j \notin E$.*

Definícia

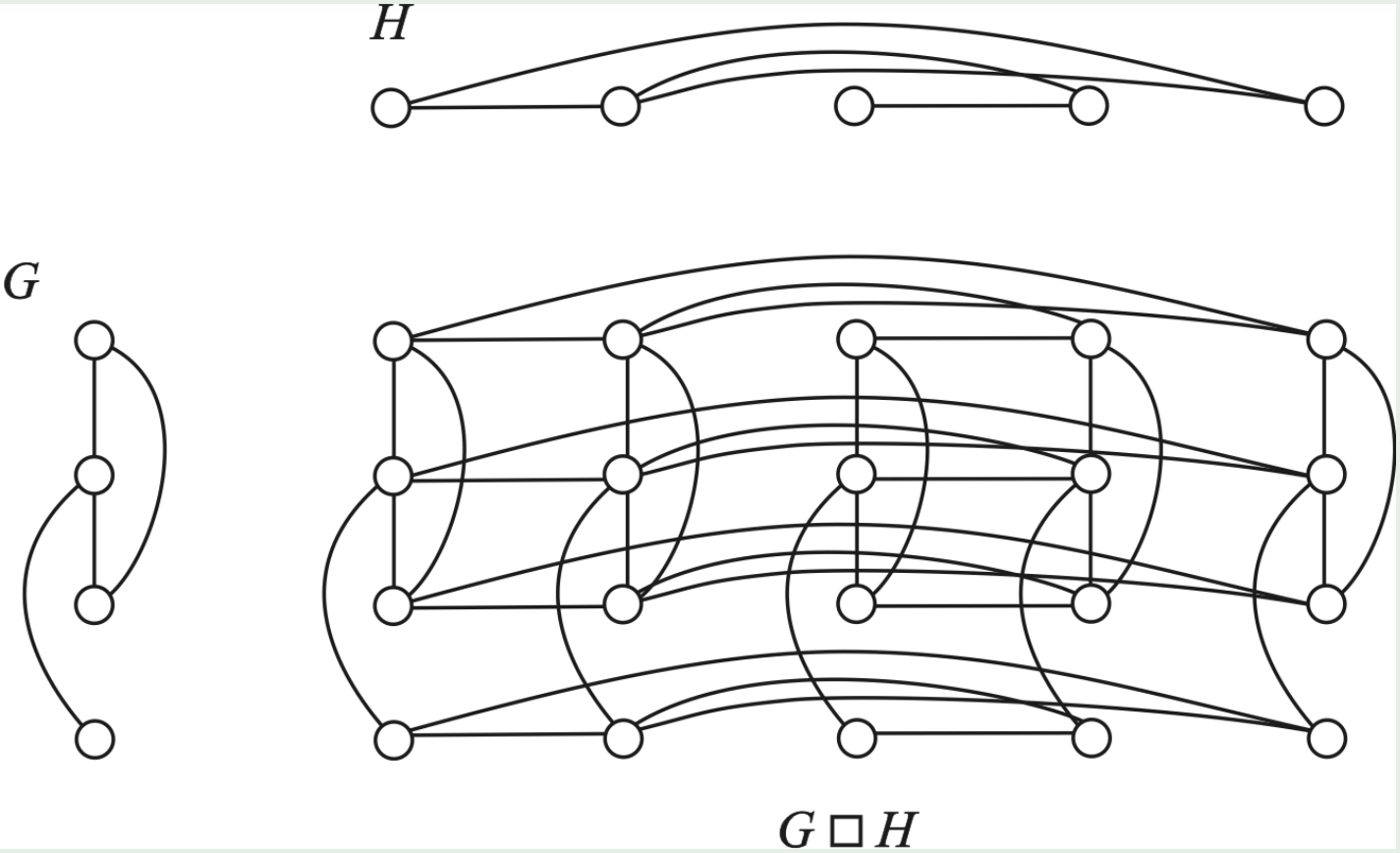
Spojenie (zykovovský súčet) *grafov* $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (E_2, V_2)$ *je graf* $G_1 \vee G_2 = (V, E)$ *taký, že* $V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2 \cup \{uv : \ u \in V_1 \wedge v \in V_2\}$.

Definícia

Karteziánsky súčin *grafov* $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (E_2, V_2)$ *je graf* $G_1 \Box G_2 = (V, E)$ *taký, že* $V = V_1 \times V_2, E = \{[u_1, u_2][v_1, v_2] : (u_1 = v_1 \wedge u_2 v_2 \in E_2) \vee (u_2 = v_2 \wedge u_1 v_1 \in E_1)\}$.

Príklad

Karteziánsky súčin grafov G, H:



Definícia

Kompletný (úplný) graf *je graf, v ktorom sú každé dva vrcholy susedné; n-vrcholový kompletný graf označujeme K_n.*

Definícia

Prázdny graf *je komplement kompletného grafu; označujeme D_n.*

Definícia

Regulárny (pravidelný) graf *je graf, ktorého všetky vrcholy majú rovnaký stupeň; ak všetky vrcholy sú stupňa r, tak graf je* r-regulárny.

Definícia

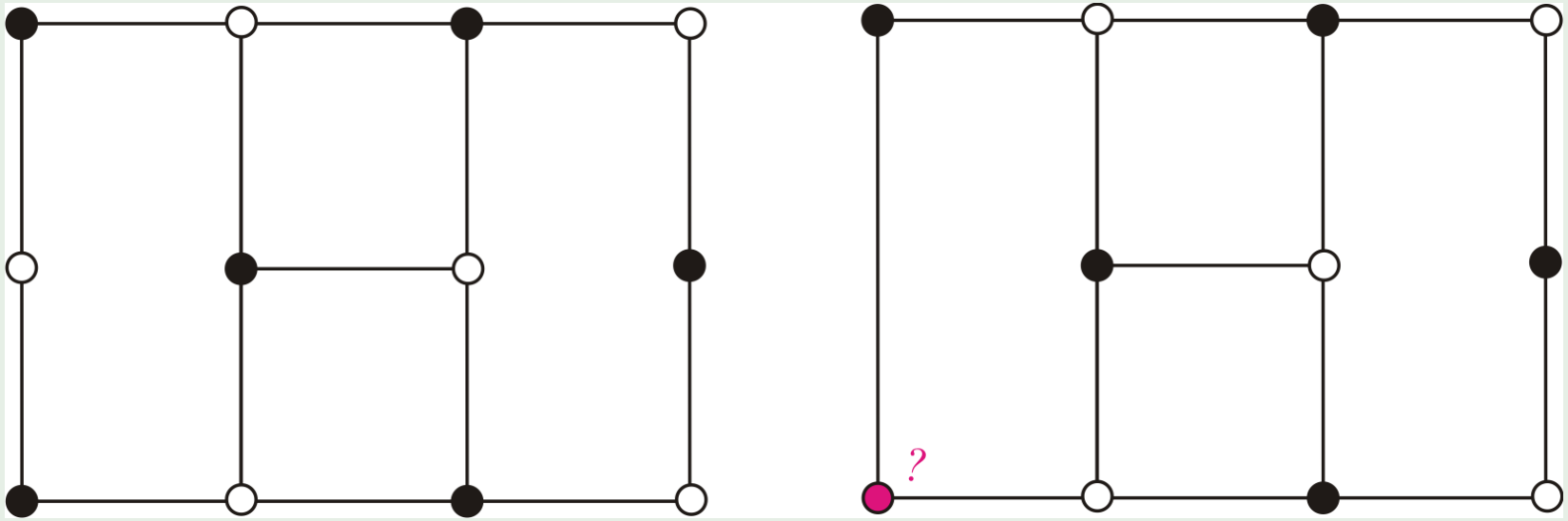
Bipartitný (párny) graf *je graf* $G = (V, E)$ *taký, že* $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ *a pre každú hranu z* E *platí, že jeden je koncový vrchol je z množiny* V_1 *a druhý z* V_2*; označujeme tiež* $G = (V_1, V_2; E)$.

Definícia

Kompletný bipartitný graf *je bipartitný graf* $G = (V_1, V_2; E)$*, v ktorom každý vrchol z* V_1 *susedí s každým vrcholom z* V_2*; označujeme* $K_{r,s}$ *(pre* $|V_1| = r, |V_2| = s$*).*

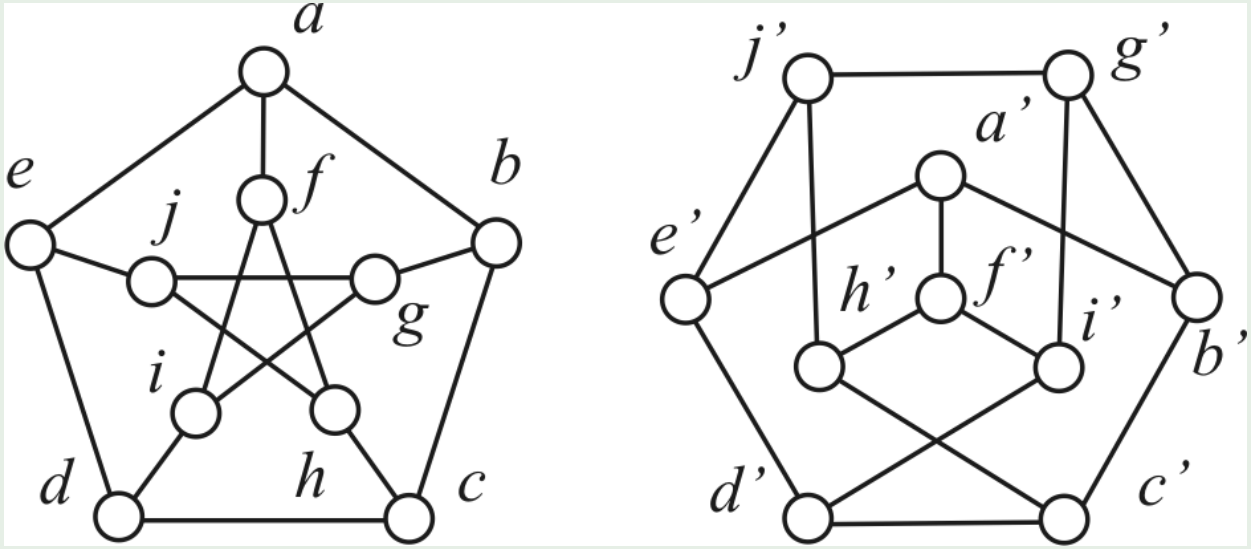
Príklad

Vľavo znázornený graf je bipartitný (jednu partíciu tvoria čierne vrcholy, druhú biele). Graf vpravo nie je bipartitný (červený vrchol nemôže byť zadelený ani do jednej partície).



Definícia

Grafy $G = (V_1, E_1), G = (V_2, E_2)$ *sú* izomorfné, *ak existuje bijektívne zobrazenie* $\varphi : V_1 \to V_2$ *(*izomorfizmus *grafov* G_1, G_2*) také, že pre každé dva vrcholy* $u, v \in V_1$ *je* $uv \in E_1$ *práve vtedy, keď* $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$*.*

Príklad

Dvojica izomorfných grafov; izomorfizmus je daný predpisom $\varphi(x) = x'$