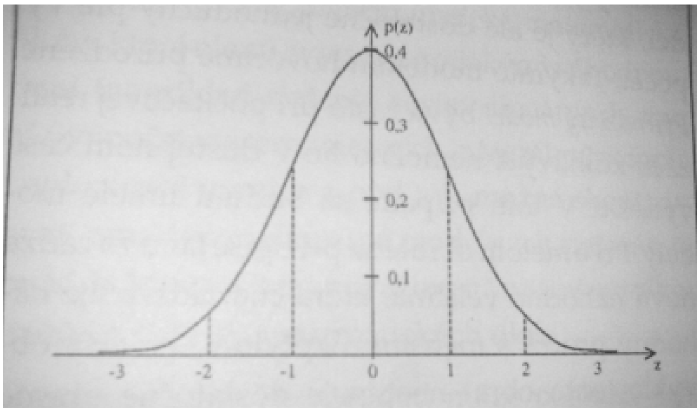
8. Téma

Normálne rozdelenie. Odvodenie pravidla troch sigma a základného vzťahu metódy Monte Carlo s použitím centrálnej limitnej vety počtu pravdepodobnosti.

Normálne (Gaussovo) rozdelenie spojitej náhodnej veličiny je jedno z najdôležitejších v matematickej štatistike a jej aplikáciách.
Normálna náhodná veličina, ktorú obvykle označujeme písmenom ξ, môže nadobúdať ľubovoľnú reálnu číselnú hodnotu s hustotou pravdepodobnosti danou Gaussovou krivkou, strednou hodnotou μ a disperziou σ^2, pre ktoré platí:

ξ :
$x \in (-\infty, +\infty)$,
$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$.

$E\{\xi\} = \mu, D\{\xi\} = \sigma^2$.



Obr. 7.1: *Priebeh funkcie hustoty pravdepodobnosti normovaného Gaussovho rozdelenia*

Základný vzťah metódy Monte Carlo je odvodený z vlastností normálneho rozdelenia spojitých náhodných veličín. V súlade s definíciou metódy Monte Carlo je pravdepodobnosť, že normálna náhodná veličina ζ nadobudne hodnotu $x \in \langle a, b\rangle \subset (-\infty, \infty)$ daná vzťahom:

$$P\{\alpha \le \zeta \le \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Po dosadení premennej $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ a jej zodpovedajúcich hraníc $z_1 = \frac{\alpha-\mu}{\sigma}$ a $z_2 = \frac{\beta-\mu}{\sigma}$ dostaneme:

$$P\{\mu + z_1\sigma \le \zeta \le \mu + z_2\sigma\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Po malej úprave a vyčíslení integrálu na pravej strane rovnice pre $z_1 = -3$ a $z_2 = +3$ dostaneme, že jeho hodnota je veľmi blízka jednotke (0,997...). Z toho vyplýva záver:

Pravidlo troch sigma:
Pre každú náhodnú veličinu ζ s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ s ľubovoľnými hodnotami parametrov μ a $\sigma > 0$ platí:

$P\{|\zeta - \mu| < 3\sigma\} \doteq 0,9973...$

čo znamená, že je prakticky isté, že výsledok jedného pokusu určenia hodnoty normálnej náhodnej veličiny ζ sa nebude líšiť od jej strednej hodnoty μ o viac než $\pm 3\sigma$.

Veľmi dôležitou vetou, na ktorej je v kombinácii s pravidlom troch sigma založené štatistické vyhodnocovanie experimentálnych údajov a modelovanie reálnych procesov metódou Monte Carlo, je **centrálna limitná veta počtu pravdepodobnosti**:

Nech $\xi_1, .., \xi_n$ sú ľubovoľné, nezávislé náhodné veličiny, ktorých intervaly možných hodnôt a distribučné funkcie sú rovnaké, t. j. rovnaké sú aj stredné hodnoty κ a disperzie δ^2 týchto náhodných veličín:

$p_j(x) = p(x), j = 1, .., N$
$E\{\xi_j\} = \kappa, D\{\xi_j\} = \delta^2.$

Potom veličina ζ daná súčtom náhodných veličín $\xi_1, .., \xi_n$ má pre veľké N približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2, pre ktoré platí:

$$\zeta = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j, \mu = N_\kappa, \sigma^2 = N\delta^2.$$

Po dosadení tohto výsledku do vzťahu ö troch sigmaä malej úprave dosávame **základný vzťah metódy Monte Carlo**:

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j - \kappa\right| < \frac{3\sigma}{sqrtN}\right\} \doteq 0,9973...$$

. pričom pre veľmi veľké N a pre ľubovoľné $\epsilon > 0$ vo všeobecnosti platí:

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j - \kappa\right| < \epsilon\right\} = 1.$$