5. Téma

Kontrakcia dĺžky a dilatácia času v špeciálnej teórii relativity.

Kontrakcia dĺžky znamená skrátenie vzdialenosti medzi dvoma bodmi priestoru. Relatívnosť priestorovej vzdialenosti je dôsledkom neinvariantnosti tejto veličiny voči Lorentzovej transformácii.
Uvažujme dve inerciálne sústavy S a S' vyhovujúce špeciálnej konfigurácie inerciálnych sústav (viď téma 2). Pevnú tyč uložme do osi X súradnicovej sústavy S a predpokladajme, že tyč je voči sústave S v pokoji.
Údaje zaznamenané pozorovateľom, ktorý je voči sústave S a teda aj voči tyči v pokoji, označme nasledovne:

x_1 - súradnica začiatku tyče, t_1 - okamih merania polohy začiatku tyče, x_2 - súradnica konca tyče, t_2 - okamih merania polohy konca tyče,

Je jedno, kedy pozorovateľ odmeria súradnice x_1 a x_2, lebo sú tyč a on navzájom v pokoji. Vo všeobecnosti preto môže byť $t_1 \neq t_2$. Tento pozorovateľ na základe meraní stanoví dĺžku tyče vzťahom: $l = x_2 - x_1$ (1).
Analogicky označme údaje zaznamenané iným pozorovateľom, pevne zviazaným s pohybujúcou sa inerciálnou sústavou S':

x_1' - súradnica začiatku tyče, t_1' - okamih merania polohy začiatku tyče, x_2' - súradnica konca tyče, t_2' - okamih merania polohy konca tyče,

V Galileiho transformácii, by sme zo vzťahov dostali

$$x_1' = x_1 - vt_1, x_2' = x_2 - vt_2 \Rightarrow l' = x_2' - x_1' = x_2 - x_1 \ (2),$$

lebo v Galileiho transformácii plynie čas v obidvoch sústavách rovnako. Ak by požiadavka súčasného merania $t_1 = t_2$ nebola splnená a napr. poloha konca tyče by bola odmeraná až po uplynutí istého času Δt po odmeraní polohy začiatku tyče, údaj dĺžky daný rozdielom $x_2 - x_1$ by bol skreslený o hodnotu $v\Delta t$. A teda na základe vzťahov (1) a (2) možno vysloviť tvrdenie, že dĺžka tyče sa pri prechode z jednej sústavy do druhej zachováva.

Pri použití Lorentzovho transformačného vzťahu pre súradnice začiatku a konca tyče v sústave S' dostávame:

$$x_1' = \gamma(x_1 - vt_1), x_2' = \gamma(x_2 - vt_2).$$

Dĺžka tyče nameraná pozorovateľom P' je potom:

$$l' = x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \ (3),$$
$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right),$$
$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right).$$

Súčasné meranie plochy začiatku a konca teraz neznamená rovnosť $t_1 = t_2$ ako v predchádzajúcom prípade, lebo sa týka času $t \neq t'$ plynúceho v sústave S'. Na základe požiadavky $t_1' = t_2'$ dostávame:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1),$$

Nakoniec pre dĺžku tyče l' v sústave S' po dosadení horeuvedeného výsledku do vzťahu (3) s uvážením, že $\gamma \geq 1$ dostávame:

$$l' = \gamma^{-1} l \Rightarrow l' \leq l.$$

Znamená to, že *pre pozorovateľa vzhľadom ku ktorému sa tyč pohybuje v pozdĺžnom smere (či už sa približuje alebo vzďaľuje) rýchlosťou v, je tyč kratšia, ako pre pozorovateľa, vzhľadom ku ktorému je tyč v pokoji.*

Dilatácia času.
Uvažujme dve inerciálne sústavy S a S' vyhovujúce špeciálnej konfigurácie inerciálnych sústav (viď téma 2). Nech bod Q leží na osi X inerciálnej sústavy S a má voči tejto sústave v čase nemennú polohu $Q \equiv [x_Q, 0, 0]$. Nech v bode Q prebieha dej sledovaný pozorovateľom P (napr. Pavol :) pevne zviazaným so sústavou S a pozorovateľom P' pevne zviazaným so sústavou S'. Údaje o trvaní deja zaznamenané obidvoma pozorovateľmi na základe meraní vlastnými identickými hodinami označme nasledovne:

> t_1 resp. t_1' - časové okamihy začiatku deja zaznamenané pozorovateľmi P, resp. P', t_2 resp. t_2' - časové okamihy konca deja zaznamenané pozorovateľmi P, resp. P',

Pozorovateľ P zaznamená časový interval trvania deja ako rozdiel:

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

V Galileiho transformácii by pohybujúci sa pozorovateľ P' nameral interval trvania deja:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t.$$

Podľa Lorentzovej transformácie však pozorovateľ P' pohybujúci sa voči pozorovanému deju konštantnou rýchlosťou v, hoci je vybavený vlastnými hodinami úplne rovnakými ako sú hodiny pozorovateľa P', nameria iné údaje začiatku a konca deja:

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_Q\right),\ t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_Q\right).$$

Nimi stanovená dĺžka trvania deja potom je:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) = \gamma\Delta t \Rightarrow \Delta t' \geq \Delta t.$$

Časový intervala trvania deja je najkratší v tej sústave, vzhľadom ku ktorej je bod, v ktorom prebieha, v pokoji ($v = 0$).
Dilatácia času znamená predlžovanie časových intervalov alebo spomaľovanie chodu hodín. Relatívnosť dĺžky časového intervalu je dôsledkom neinvariantnosti tejto veličiny voči Lorentzovej transformácii.